Humboldt-Universität zu Berlin

Dissertation

Büro

Zur Erlangung des akademischen Grades doctora philosophiae (Dr. phil.)

Philosophische Fakultät III

Gloria Meynen

Dekanin: Prof. Dr. Ingeborg Baldauf

Gutachter/in: 1. Prof. Dr. Friedrich Kittler

2. Prof. Dr. Thomas Macho

Datum der Einreichung: 07.01.2004

Datum der Promotion: 20.12.2004

ZURÜCK IN DIE ZUKUNFT

Ein Vorwort

Zu Neujahr 1938 verweist Friedrich Tobler, der Direktor des Botanischen Instituts in Dresden, auf ein Gewächs, das schon alle Spuren der Verwesung an sich trägt, und dennoch seinen Nutzen in der deutschen Kriegswirtschaft erbringen soll: Er erwähnt die Torffaser, die man auch Wollgras nennt.[1] Während die Engländer und Amerikaner für die Entzifferung der Funksprüche und die Berechnung von Schockwellen auf den Computer setzen, spekuliert der deutsche Vierjahresplan mit Faserpflanzen. Aber die Fronten liegen gar nicht so weit auseinander. Alan Turing braucht nicht mehr als einen Bleistift, ein Papierband, einen Radiergummi und strikte Disziplin, um die Programmierbarkeit der Universalmaschinen mit Papiermaschinen zu demonstrieren. In den Anfängen des Computers findet man einen Rest von Büroarbeit. Noch ein letztes Mal tritt ein Buchhalter auf, den Turing fortan durch Maschinenbeschreibungen ersetzen will. Der Hintergrund, vor dem Turing die digitalen Universalmaschinen entwirft, ist das Kontor, das mit Rechenmaschinen und Lochkarten operiert. Der deutsche Direktor setzt dagegen den Hebel der Kriegswirtschaft am anderen Ende an. Während bei Turing das Papierbüro nur als müde Reminiszenz aufscheint, kehrt Tobler tatsächlich zu den Anfängen des Papierbüros zurück. Das Büro hat seinen Namen von den übelriechenden Resten der Pflanze, die das Moor als Torflocke zurücklässt – den zersetzten Strünken des *eriophorum angustifolium*. Unverarbeitet hat die Torflocke viele Funktionen. Sie schürt das Feuer, eignet sich als Viehfutter und stillt Wunden. Man verwendet sie als Lampendocht[2] und Polstermaterial, mit dem schon die Kelten ihre Kissen stopfen.[3] Dieser Funktion, Kissen zu polstern, verdankt die Faser ihren entscheidenden Namen, der sich vom Verb »burren«, »heben«, ableitet. Das Wollgras oder die Torflocke heißen deshalb auch »Burre«.[4] Werden die Torfflocken verfilzt, entsteht Papier und Pappe. Verspinnt man die Fasern dagegen mit grober Wolle zum Faden, so werden sie zum Ausgangsmate-

[1] Friedrich Tobler 1938: 102. Die Namen des Torfgrases vgl. Gustav Hegi 1967-1980: II 44.
[2] Gustav Hegi 1967-1980: II 43.
[3] Helmut Birkhan 1997: 776.
[4] Für den Zusammenhang von »Burre« und »burren« s. Grimm/Grimm 1860: II 545. Der Eintrag »bureau« fehlt treffenderweise, obwohl er schon seit 1695 vereinzelt zu finden ist (vgl. Pfeiffer 1989: I 234).

rial eines groben Stoffes, aus dem man Mönchskutten herstellen kann[5] und einen Gegenstand, der die Anfänge des Büros bezeichnet: Aus dem grobem Wollstoff werden auch Rechentücher gewebt, die man nach der Pflanze »burre« nennt. Auf diesen Rechentücher rechnen die Kaufleute ihre Münzen um. Die Spalten und Reihen des Tuchs findet man auch auf manchen Zahltischen. Sie bilden den Abakus nach. Ihre steinernen Pendants schaffen nicht den Sprung über die Alpen. In den weglosen ausgedehnten Waldgebieten und sumpfigen Tiefebenen nördlich der Alpen empfehlen sich weniger Sand, Staub und Marmorplatten. Die tonnenschweren Rechentische muss ein leichtes und mobiles Medium beerben. Das neue Medium ist ein übelriechendes Tuch – die *burre*. *Burre*, so scheint es, ist die gallische Antwort auf den Abakus. Denn in dem Rechentuch »burra« werden die Bedeutungen des Abakus, als »crendentztisch«, »anrichttisch«, »schreibtisch« und »tafel« noch einmal auf eine Bedeutung zurückgeführt: auf die Rechentafel.[6] Auf der Rechentafel entsteht das Büro als Ort der Mechanisierung und als Ort der Routen und Routinen. Es verdankt sich der Ordnung der Zahlen.

»Burre« bezeichnet zunächst nicht mehr als eine Tabelle. Das Rechentuch vervielfältigt die Bedeutungen. Zunächst entsteht die Verkleinerungsform »Bureau«, die lediglich das Tuch bezeichnet, das den Rechentisch bedeckt. Von dort wird es im 15. Jahrhundert auf den Tisch übertragen, vom Tisch springt die Bezeichnung als »Amtszimmer« und »Schreibstube«[7] auf den Raum über. Der Raum der Kontoführung und der Bilanz, der Korrespondenz und des Handels trägt erst seit 1920 den Namen »Büro«.[8] »Büro« bezeichnet das ganze Universum der Schreibtätigkeiten. Nachdem schließlich vom »Schreibstube« über das »Amtszimmer« bis zur »Büromaschine« alles außer Aufschreibesysteme unter dem Namen Büro firmieren kann, kehrt das Büro 1973 zur Schreibfläche zurück. Die wörtliche Übersetzung von Abakus – »nicht ist es eine Stütze« – ist ein sprechender Namen für die Widerständigkeit Graphischer Benutzeroberflächen. Seitdem *Xerox Parc* mit ihnen die Zukunft des Büros entwirft, bescheren sie der Tafel ein Reentry. Fenster und Icons sind der ferne Nachfahr des Abakus.[9] Die digitalen Papierformate Alan Kays bevölkern die Graphischen Benutzeroberflächen

[5] »la bure« als brauner grober Wollstoff der Mönchskutte. Vgl. Paul Robert 1993: 273.
[6] Für die Bedeutungen von Abakus, die fast dem Büro abgeschaut sind, vgl den Eintrag »Abacus« bei Johannes Serranus 1539: 1.
[7] Vgl. Wolfgang Pfeiffer 1989: I 234.
[8] Zum »bureau« als Rechentisch des burgundischen Herzogs. vgl. Karl Menninger 1957: II 141 und 158.
[9] Alan Kay 1977: 231 + 234.

seit den frühen siebziger Jahren. Sie beziehen ihre Operativität nicht mehr vom Staub der Holztafel, vom Wiesenkraut und dem Handwerk des Polsterers. Die digitalen Papierformate sind neue Tafeln, die ihre Anschaulichkeit und Ergonomie der Software und den Taktraten des Rasterbildschirms verdanken. In einem Glossar von Apple zu den *Human Interface Guidelines* findet man unter dem Stichwort »workspace« eine Warnung: Nicht zu benutzen als Synonym für »desktop« oder »finder«. Das digitale Büro ist kein Schreibtisch. Es füllt keine Räume, sondern entfaltet seine Macht im Kleinen. Und selbst der Benutzer muss zu dieser miniaturisierten Welt ins richtige Verhältnis gesetzt werden. Auf ihn verweist nur ein kurzer Eintrag: »user name: zwei Worte«. Das neue Büro ist kein Ort für Bürovorsteher. Sekretärinnen sucht man vergebens. Der Mob der weißen Seite, die sprechende Büroklammer, der hüpfende Punkt und die animierten Icons, ist nur ein Effekt der Schreibfläche. Das digitale Büro ist in Wahrheit flach. In den Icons und Fenstern der Graphischen Benutzeroberflächen scheint noch einmal ein Anfang auf – die Erfindung der ebenen Fläche.

Während die Studien zur Architektur, Soziologie und Bürokratie des Büros unzählbar sind, blieb der mikroskopische Blick auf die Schreibflächen annähernd ausgespart. So haben wir zwar mit kulturellen, sozialen, ökonomischen und architektonischen Grundrissen die Hierarchien und Informationsflüsse genau vermessen. Wir kennen die Phonstärke von Kaffeemaschinen, die dämmende Wirkung der Büropflanzen – die Vertreter der Bürolandschaften haben die akustische Landschaft der Treppen, Flurbeläge und Zwischenwände im Auftrag der Gebrüder Schnelle in den sechziger Jahren akribisch notiert. Und daneben ist der ordentlichste Ort des Universums, das Büro, nicht selten eine Bühne neurotischer Unordnung. Wir kennen von Bartleby, über C. C. Baxter bis Madmen die Alpträume, Sehnsüchte und Leidenschaften, die außerhalb der Akten zwischen den Ablagen entstehen und auf den Korridoren zirkulieren und neue Nahrung finden. In den Bürogeschichten erfahren wir einiges über die Bürokratien der Schriftstücke und Schriftführer. Doch über die elementarsten Funktionen des Büros, wie auf und in der Fläche gelesen, geschrieben und gerechnet wird, findet man wenig – und wenn, dann nur verstreut in den Hilfswissenschaften der Einzeldisziplinen. Das vorliegende Buch rückt die Materialität und Operativität der Bild- und Schreibflächen in den Vordergrund. Denn es geht davon aus, dass die Materialität darüber entscheidet, was gesagt, geschrieben und gerechnet werden kann. Die Verschriftlichung der Rechenwege kann beispielsweise nur in einem Medium gedacht werden, das selbst das Löschen noch verschriftlicht. Will man Beweise und Konstruktionen schriftlich festhalten, muss man wissen, wie

Bewegungen und Prozesse stillgestellt, wie sie verebnet werden können. Darum lenkt das vorliegende Buch den Blick auf die Operationen der Schreib- und Bildflächen. Wie werden sie in der Fläche angeschrieben? Wie wird Bewegung codiert? Und welchen Gebrauch machen die Oberflächen von ihren Zeichen?

Wären die Ränder der Schreibflächen die Grenzen des Büros, dann wäre die Macht des Büros sehr lokal. Sie wäre ein reiner Oberflächeneffekt und verbliebe in Flatland. Aber auf den neuen Benutzeroberflächen regiert eine Ökonomie der Fläche, die über die Grenzen der Fläche hinausgeht. Diese Ökonomie setzt auf Zergliederung, Standardisierung und Wiederholung. Ihre prominenteste Vertreterin ist die Routine. Als Verkleinerungsform von »Route« steht »Routine« nicht nur für kurze Wege. Routinen schreiben nicht nur Operationen verkürzt an, sie können auch Operationen aus dem Nichts konstruieren. Die zweidimensionalen Oberflächen des Büros folgen dabei einer ganz eigenen Effizienz. Mehr Schriftlichkeit vervielfältigt nicht notwendig die Wörter, sondern bündelt sie. Was einmal geschrieben ist, muss kein zweites Mal notiert werden. Man verweist einfach auf die Stelle, die den entscheidenden Text enthält. Sind z. B. Handlungsanweisungen einmal allgemeingültig formuliert, beschreiben sie nicht nur eine einzige Handlung. Über ein Netz von Relationen und Analogien kann man mit einer einzigen Beschreibung viele Beschreibungen generieren. Die Geschichte des Büros ist deshalb zugleich eine Geschichte der Verallgemeinerung – die Abstraktion wird auf der ebenen Fläche erfunden. Dabei ist die Operation des Übertrags ganz entscheidend. Wie kann man über die Ränder der Tafel hinaus zeigen, wie über den Tafelrand hinaus verweisen? Schon in der Geometrie des 5. Jahrhunderts benutzen die Griechen für die Gesten des Zeigens, Verweisen und Beweisens nur ein einziges Verb – »deiknumi«. Wenn sie ihre Beweise mit der Formel »Hopei edei deixi« (»dies galt es zu beweisen/zeigen«) beenden, dann klingt in diesem Satz eine Dreizahl von Schreib- und Zeichenoperationen mit. Sie verweisen und beweisen, indem sie auf etwas zeigen. Der Beweis oder das allgemeingültige Formulieren von Aussagen und Konstruktionen ist an Gesten und Techniken des Zeigens und Verweisens gebunden. Die ersten Kulturtechniken der Abstraktion finden sich in den Anfängen der deduktiven Geometrie. Ein Schwerpunkt liegt deshalb auf der Geometrie, ihren Konstruktionen und Beweisen. Wie entsteht die zweidimensionale Oberfläche in der Geometrie? Wie bildet sich auf ihr eine zweidimensionale Geste des Zeigens und Verweisens, die Allgemeingültigkeit und Anschaulichkeit miteinander verbinden kann? Welche Rolle spielt dabei das Diagramm? Wie lassen sich mit der Tafel abstrakte geometrische Gegenstände konstruieren? Ein weiterer Schwerpunkt liegt auf der

Alphabetisierung der Mathematik. Seit wann und wie werden Rechenwege und Beweisverfahren verschriftlicht? Welche Rolle spielt dabei das Alphabet? Und wie entstehen schließlich aus den frühen mathematischen Verfahren die Algorithmen und die Routinen unseres Maschinen- und Büroalltags?

Das Buch zielt auf eine Mediengeschichte der Operationen in der Fläche. Wie kann man Bewegung, Handlungen, Praktiken und Techniken mit und in der Fläche kodieren? Gibt es ein genuines Wissen von und in der Fläche? Die Antworten zielen auf eine Wissensgeschichte der visuellen Kommunikation. So kann man etwa fragen, wie und warum wir ein Ei zeichnen, aber die gleichförmige Krümmung eines Kreises meinen können, unter welchen Umständen also eine flüchtige und scheinbar fehlerhafte Zeichnung so störungsfrei und effizient auf abstrakte Gegenstände und Konstruktionen verweisen kann. Im Mittelpunkt steht dabei ein Instrument, das im buchstäblichen Sinn nichts anderes tut als zeigen. Es ist ein einfacher Stab, ein Schattenzeiger. Dieses Instrument zur Zeitmessung wird zum Ausgangspunkt eines neuen Wissens. Die Neuheit dieses Wissens liegt nicht in ihren Gegenständen, Techniken und Erkenntnissen begründet. Es ordnet altes Wissen neu an. Dabei unterscheidet es zwischen unbeweisbaren und beweisbaren Aussagen. Die unbeweisbaren Aussagen setzt es als Prinzipien, die beweisbaren sind die Folgerungen. Aussagen stehen fortan nicht mehr verstreut und unverbunden nebeneinander. Stattdessen verbindet sie Netz von Relationen, Abhängigkeiten und Verwandtschaften. Alle Konstruktionen und Beweise werden dabei auf nichtbeweisbare Hauptsätze zurückführt. Am oberen Ende der Skala, dort wo die Prinzipien der Prinzipien stehen, jene Sätze, die keiner Begründung bedürfen, funktioniert das neue Wissen fast magisch. An den ersten Satz, das erste Prinzip, muss man glauben. Denn es erzeugt Sätze, die beweislos gültig sind. Die neue Magie perfektioniert den Verweis. Abstrakte Gegenstände entstehen buchstäblich aus dem Nichts.

Die Griechen plünderten die Techniken der Babylonier und Ägypter und haben sie mit neuen Funktionen versehen. Der Verweis, den die Griechen von den Babyloniern übernommen haben und perfektionieren, streut in viele Bereiche. Und mit dem Aufkommen des neuen axiomatischen Wissens, das Prinzipien von Folgerungen trennt, wandelt sich auch die Kulturtechnik des Zeigens. So ist der Verweis nicht unbedingt an die idealen Gegenstände der Geometrie und Arithmetik gebunden. Mit einem Zeiger, sei es eine Linie, eine Zahl oder ein Buchstabe, kann man eben auf irgendetwas verweisen. Es kann ideal und unsichtbar oder ganz sichtbar und höchst lebendig sein. Das Format der deduktiven Geometrie wird übertragen und universalisiert. Es färbt zunächst auf das Zahlenkonzept der

Araber ab, um dann erneut vom Osten aus Europa mit neuen Zeichen und Oberflächen zu kolonisieren. So finden die Protokollierung der Rechenwege und die Formalisierung der Beweise und Konstruktionen von Bagdad ihren Weg nach Sizilien und Cordoba. Auch in der jüngsten Gegenwart gibt es Verweistechniken, die auf die frühen geometrischen Beweistechniken zurückgehen. Beispielsweise bedienen sich die objektorientierten Sprachen des platonischen Verweiskonzepts. Die Eigenschaften der Objekte sind in Klassen niedergelegt. Nur ihre konkrete Erscheinung wird durch die Objekte definiert. Jedes Ei kann etwa als Objekt der Klasse Kreis definiert werden. Mit Smalltalk, einer objektorientierten Sprache, sind in XeroxParc um 1970 auch die ersten Grafischen Benutzeroberflächen entwickelt und programmiert worden. Auch die Graphischen Benutzeroberflächen nutzen den Verweis. Am deutlichsten wird das im Begriff der Benutzerfiktion [*user illusion*], einem Begriff, der in den achtziger Jahren die Desktop-Metapher ablöste. Alan Kay hat Anfang der siebziger Jahre überlappende Fenster in die Graphischen Benutzeroberflächen eingeführt. Über die »Benutzerillusion« schreibt er:

> ...what is presented to one's senses is one's computer. The »user illusion« as my colleagues and I called it at the Xerox Palo Alto Research Center, is the simplified myth everyone builds to explain... the system's action and what should be done next.[10]

Allein sichtbar ist der Computer und dennoch kann kein Blick die Hardware sichtbar machen. Vannevar Bush wusste 1945 noch nichts von der Benutzerillusion. Er hat MEMEX tatsächlich noch als realen Schreibtisch konstruiert. Die Mainframecomputer haben in den 50er und 60er Jahren zuweilen zwar noch eine Steuereinheit, die in einem Schreibtisch untergebracht ist, aber dennoch bindet diese Steuerpulte nichts mehr an die Aufgaben eines Kontortisches. Deshalb war die Desktopmetapher bei XeroxPARC von Anfang an vollständig irreleitend. Die graphischen Benutzeroberflächen haben sich zwar auf breiter Bürofront durchgesetzt. Doch die damit verbundenen Programmiersprachen mit ihrem didaktischen Anspruch haben nicht den Weg ins Büro gefunden. Keine Sekretärin benutzt *Turtle Graphics* von Seymour Papert oder *Smalltalk* von Alan Kay, um eigene Anwendungen zu programmieren. Die Benutzeroberflächen machen aus dem Computer ein undurchschaubares Wesen. Wäre er ein Sekretär, so wäre Verschwiegenheit seine größte Tugend. Der Benutzer stellt sich einen Schreibtisch vor. Er zeigt auf Papierstapel und Ordner, legt Icons in Papierkörbe oder ordnet Dateien in Aktenordnern an – solange die

10 Alan Kay 1984: »Computer Software«. Scientific American 251 (3). S. 41-47, zit. Hier, S. 42.

erwartete Operation eintritt, ist der Bildschirm eine Schreibtischoberfläche. Der Verweis organisiert im Verborgenen. Die Benutzerfiktion funktioniert dabei genauso wie die fehlerhafte Zeichnung. Wir zeichnen ein Ei, doch wir meinen die reguläre Krümmung des Kreises. Das Bild, das wir uns von unseren Computern machen, kann von ihren Maschinenzuständen abweichen. Dennoch können wir mit dem Computer kommunizieren. Unsere Vorstellungen können falsch und wahnhaft sein. Aber dieser Wahn funktioniert, wenn er nur einigermaßen kohärent und zweckmäßig eingerichtet ist.[11] Insofern zielen auch alle Vorwürfe in die Leere – verdrängt wird nichts. Im Gegenteil: Wir können unseren eigenen Augen trauen und mit der Maschine interagieren, ohne irgendein technisches Wissen zu besitzen. Und dennoch muss man nicht glauben, was man sieht, damit die technische Magie der graphischen Schnittstellen funktioniert. Dass die intuitive Benutzung eine Illusion ist, scheint offenbar. Die Entwickler der graphischen Benutzeroberflächen haben keine Ontologie programmiert. Ebenso wenig wollten sie ideale Gegenstände erzeugen. Der Platonismus der graphischen Benutzeroberflächen ist für den Hausgebrauch eingerichtet. Er ist rein funktional. Dennoch nutzt schon Platon das Regime der Zeiger und Blicke, etwa in seinem Höhlengleichnis oder in den Zeige- und Verweisgesten des Menon-Dialogs. Aber die Technik ist älter. Dass man mit Zeigern, Operationen, Prozesse und Zustände steuern, modellieren und verändern kann, haben die Griechen zuerst mit den Anfängen der Klassischen Geometrie entdeckt. Die Operationalität der ersten graphischen Benutzeroberflächen findet man in einem Gegenstand, der vollständig unsichtbar ist und uns nahezu überall hin begleitet: Dieser stumme, unsichtbare Begleiter ist die ebenen Fläche. Auf ihn rekurrieren fast alle unsere Kulturtechniken des Zeichnens, Rechnens und Schreibens. Und selbst dort, wo wir nur im Gedanken rechnen, zeichnen und schreiben, haben wir eine ebene Fläche im Sinn.

Das vorliegende Buch handelt von der Erfindung der Fläche. Es untersucht die ersten basalen Zeichenprozessen – das Zeichnen einer Linie, das Errichten eines Lots bis zu den den komplexen Verweistechniken der ersten Diagramme, in denen Buchstaben Linien bezeichnen, als Boten einer Macht, die weitgehend im Verborgenen agiert. Der erste Teil entfaltet zwischen Mauszeiger und Schattenstab eine Kulturtechnik des Zeigens. Dabei gilt der Blick den Operationen der Bildfläche, ihren Codierungen und Zeigeoperationen. In diesem

[11] Vgl. Michael Friedewald 1999: 327.

Teil frage ich nach den Werkzeugen und Instrumenten in und auf der Fläche, die hinter der sichtbaren Welt der Bilder und Diagramme eine unsichtbare Welt idealer Gegenstände erzeugt. Ich werde zeigen, wie aus dem Schattenstab ein ganzes Universum gerader Linie und rechter Winkels entsteht. Hinter der Herrschaft des rechten Winkels verbergen sich zwei Fragen: Wie wird der Winkelhaken, der so sichtbar mit dem Handwerk der Archiktekten und Poliere verbunden ist, auf die Bildfläche übertragen? Und wie kann er dort zum Universalmedium des Verweises werden? Der Winkelhaken ist zerlegbar. Er setzt zwei Linien zueinander ins Verhältnis. Diese Relation vertritt den Schattenzeiger auf der Bildfläche. Er steuert die Übertragungen vom Raum auf die Fläche, er erzeugt den Übergang vom Sichtbaren zum Unsichtbaren. Die Anfänge einer Theorie der Parallelen lassen noch erahnen, wie aus der Materialität der Tafel die Schattenwelt der deduktiven Geometrie entsteht. Dabei spielt der Zusammenhang zwischen Geradheit und Evidenz eine entscheidende Rolle. In vielen Sprachen finden sich Wörter, die für Geradheit, Evidenz und Wahrheit nur ein einziges Wort kennen. So steht das lateinische »rectitudo« für »Geradheit« und »Richtigkeit«.[12] Und selbst die deutschen Wörter »richtig«, »senkrecht« und »gerecht« lassen noch erkennen, dass irgendein Zusammenhang zwischen den Medien der geraden Linie, der Wahrheit, dem Recht und der Evidenz bestanden haben muss. Und es scheint, als sei mit der geraden Linie zwangsläufig ein Recht auf Evidenz verbunden. Doch nicht schon immer bedeutete Geradheit Evidenz. Und nicht schon immer konnte man Evidenz mit Kürze und Geradlinigkeit verwechseln. Diese Verwechselung hat nicht nur eine Geschichte. Sie hat auch einen Ort: Ich werde zeigen, wie Evidenz und Geradlinigkeit über die Kulturtechniken des Zeigens und Verweisens zueinander finden.

Der zweite Teil handelt von einem kleinen Kreis [»circulus parvus«], keiner Zahl [»nulla figura«] oder dem Nichts [»al-sifr«, »sunya«], um nur einige Namen einer Leerstelle aufzuführen, die seit dem späten 6. Jahrhundert zum Gesetz des dezimalen Stellenwertsystems wird. Sie erzwingt nicht das schriftliche Rechnen wie sich bei al-Hwarizmi und Fibonacci zeigen lässt. Aber die Null ist der Bote der Schrift. Denn das Büro ist *burra* – es gründet auf den Operationen des Rechenbretts. Darum kehrt die Arbeit zum Abakus zurück. Im Zentrum stehen Schreibflächen und Zahlwege. Das Büro als Schreibfläche reagiert auf die leere Spalte des Rechenbretts. Die Rechenroutinen, die al-Hwarizmi und Fibonacci mit

[12] Karl Ernst Georges 1998: I 2237.

den neuen Ziffern vollführen, sind nicht schon vollständig in der Schrift angekommen. Sie mechanisieren vielmehr zunächst den Umgang mit der leeren Spalte auf dem Rechenbrett. Sie operationalisieren die Leere deshalb nicht in der Schrift, sondern auf dem Rechenbrett. Darum soll hier die Aufmerksamkeit auf die Operationen des Schreibens und Überschreibens, auf die Speicher- und Löschtechniken der mathematischen Rechenflächen gelenkt werden. Doch warum ist die Materialität so entscheidend? Welchen Einfluss übt sie auf die Operativität aus? Während Tokens additiv funktionieren, die Verwaltung vor 2500 v. Chr. um eine Kunst des Zählens zentrieren,[13] kann die wiederbeschreibbare Tafel Schreibvorgänge nur als Löschvorgange verbuchen. Schreiben bedeutet Löschen. Das Büro folgt nicht dem Takt der Stechuhr oder der Stimme des Diktaphons. Es senkt den Blick und fesselt ihn an eine zweidimensionale Matrix. In den römischen Zahlzeichen und der Null sucht er die doppelte Codierung von Schreiben und Löschen. Dieser Blick zielt weniger auf die Anfänge der Operationalisierung. Denn die Anfänge der Routinen konzentrieren sich in einer einzigen Operation: dem Zehnerübertrag. Der Zehnerübertrag bündelt die Zahlen nicht nur. Er ersetzt sie: schreibt und löscht zugleich. Der Zehnerübertrag optimiert also nicht die Speicherung. Er setzt vielmehr auf die Mobilität der Zahlen. So ist er weniger eine Technik des Speicherns und Merkens, sondern eher eine avancierte Technik der mobilen Adressierung. Auf den Rechenflächen der Mathematik ist der Zehnerübertrag das Pendant zu den geometrischen Proportionen. Während der Schattenzeiger als Lot und rechter Winkel dem Diagramm seine Spuren aufdrängt, wird dem Zehnerübertrag das Übertragen und Speichern zum Problem. Wie werden Zwischenergebnisse gemerkt? Wie Rechenwege angeschrieben? Hinter der Frage nach den Kulturtechniken des Übertrags, der Frage, wie Zahlen bewegt und transportiert werden, steht deshalb eine Schriftgeschichte der Arithmetik. Doch sie findet ihren positiven Ausdruck nicht in der Schrift, sondern in einer Mediengeschichte des Löschens. Wie können Zahlwege protokolliert werden? Wie werden Rechenwegemanipuliert, verwaltet und notiert.

Ähnlich wie bei den Proportionen der geometrischen Dinge, gibt es Rechentechniken, die über den Rand der Tafel hinausweisen. Denn die ersten schriftlichen Verfahren der Arithmetik ahmen die Routinen der Rechenbretter nach. Die verschiedenen Techniken des Zehnerübertrags sollen deshalb zweifach betrachtet werden. Die Mobilität der Zahlen ermöglicht zugleich auch eine

III II I

[13] Schmandt-Besserat 1992: II 177.

Mobilität, die die Dimensionen der Tafel durchlässig macht. Mit den Zahlen werden dabei auch Kulturtechniken vom Raum auf die Fläche übertragen. So verbirgt sich hinter dem Zehnerübertrag nicht nur ein Problem, auf das alle Rechenbücher und frühesten Rechenmaschinen reagieren müssen. Er steht auch für eine bahnbrechende Erfindung, indem er die Routinen des Rechenbretts auf die Schreib- und Zeichenflächen der Mathematik überträgt. Im Zentrum stehen die leeren Spalten des Rechenbretts, von denen sich die Funktionalität der Stellen im dezimalen Positionssystem ableiten lassen. In den Übersetzungen des *Algorismus*, jener ältesten lateinischen Schrift, die in das Rechnen mit der Null einführt, heißen die Stellen neben »differentia«, Unterschied, auch »mansio«, »Nachtlager« und »Aufenthaltsort«. Die Zahlen verweilen auf den Stellen nur kurz. Sie werden nicht sesshaft. Ein »Nachtlager« ist der ideale Speicherort für die mobile Ordnung der Zehnerüberträge. Ein »Aufenthaltsort« kommt der mobilen Ordnung der Leerstellen entgegen. Folgt man den Wurzeln des Büros, jener Sumpfpflanze, aus der man mit Wolle und Filz Rechentücher webte, so ist das Büro keineswegs ein Archiv. Es ist vielmehr ein Ort maximierter Unruhe: ein Umschlagplatz für Daten und Prozesse unterschiedlichster Art, die nur kurz – etwa für die Dauer einer Nacht – ruhen, um erneut in den Fluss der Zahlen, Zeichen und Codes eingespeist zu werden.

Diese Mobilität spiegelt sich auch in der Dynamik der Datenformate nieder. Die Grenzen zwischen Bild, Schrift und Zahl sind von Anfang an fluide. Die Geometrie ist zuweilen arithmetisch, die Zahlsysteme haben nicht selten geometrische Merkmale. Zwischen Diagramm und Rechnung läuft nur eine unscharfe Grenze. Denn Diagramme unterwerfen die Ordnung der Arithmetik den Gesetzen der Planimetrie. Die Stelle hat einen Ort, sie operiert in diesem Sinne immer schon geometrisch. So weist das dezimale Stellenwertsystem jeder Zahl eine Adresse in einer Zahlenreihe zu. Die Buchstabenbezeichnungen im Diagramm funktionieren ebenso kardinal. Die Bezeichnungen veranschaulichen die Reihenfolge der Beweisschritte: Erst A, dann B. Sie machen aus jeder Fläche eine Liste. Beweisfolgen können mit Diagrammen und Texten notiert werden. Zahlen erhalten mühelos auf Schreib- und Bildflächen Asyl. Will man also der Geschichte auf den Bild- Rechen- und Schreibflächen des Büros folgen, kann man Bild, Schrift und Zahl nicht getrennt voneinander befragen. Vielmehr muss die Aufmerksamkeit auf den Übertragungen liegen. Dass etwa mit Flächen und Linien gerechnet werden kann, wussten schon die Babylonier. Geometrische und arithmetische Kulturtechniken lassen sich nur schwer voneinander trennen. Aber man kann nicht auf jeder Fläche mit Leerstellen umgehen. Leerstellen brauchen ein wiederbeschreibbares Medium – ein Medium, das Schreiben und Löschen ineins setzt. Das Universalmedium der Leerstellen ist der Abakus: die Staubtafel und das Rechenbrett. Auf den Rechenbrettern wird die Leere durch die Abwesenheit der Rechensteine bezeichnet. Die Leere der Rechenbretter bleibt immobil. Sie hat kein Gedächtnis ihres Ortes und hinterlässt keine Spuren. Denn die Leere ist nicht operabel. Und dennoch begleitet sie jede Rechnung als stille Drohung. Sie ist ihre Welt und ihre Umwelt. Die Leere ist ein weißes Blatt, eine unbeschriebene Tafel. Doch sie nistet auch in der Fülle: in jeder Zeichenbewegung und im Zehnerübertrag, der noch bei al-Hwarizmi Zahlen unter Zahlen begräbt. Das Rechenbrett ist das Meer der Arithmetik. Auf ihm ist die Leerstelle ein Pirat, der den Erfolg des Rechners stets zu unterwandern droht. Denn der Zehnerübertrag wird gemerkt, nicht geschrieben. Er ist die »Zahl im Sinn«, die dem Gedächtnis oder den Fingern anvertraut wird. So sehr das Reinigen des Rechenbretts deshalb für Übersichtlichkeit sorgt, so droht die Mündlichkeit der Zahl doch immer wieder jede noch so kurze Unaufmerksamkeit mit einem Abbruch zu bestrafen. Denn den Rechenweg zeichnet nichts auf. Mit der Leere der Rechenbretter lässt sich nicht rechnen. Und selbst mit der Einführung der Null ist sie noch zu keinem Zeichen geworden, mit dem Löschvorgänge protokollierbar werden. Denn die Speicherbarkeit der Rechenroutinen ist keine Funktion des Zeichensatzes. Sie ist, entgegen der These Krämers, nicht »ausschließlich im Medium des Zeichens« denkbar.[14] Denn der Code selbst ist kein Medium. Seine Medien sind Bild- und Schreiboberflächen. Zählsteine bleiben ohne ihre Bullen ungezählt. Erst ihr Abdruck in Ton setzt Zahl und Buchhaltung in eins und vielleicht sogar – wie Schmandt-Besserat zuerst vermutet – an die Anfänge der Schriftgeschichte.[15] Römische Zahlzeichen sind ohne Rechenbretter ungestalt und dysfunktional. Denn zum schriftlichen Rechnen taugen sie wenig. Die Icons der Graphischen Benutzeroberfläche schließlich bleiben ohne die Technik der Rasterbildschirme im Reich der Magie.[16] Und erst ein kleines Modul in Maschinensprache geschrieben – der *Bit field block transfer* – stattet sie mit der Beweglichkeit aus, der es ihnen ermöglicht, durch das schnelle Verschieben, Kopieren und Überlagern von Bitmustern die Funktionen von Papierstapeln und

III II I

[14] Sybille Krämer 1988: 54.
[15] Denise Schmandt-Besserat 1992: I 161,162.
[16] Für David Canfield Smith – dem Entwickler der Icons -- sind sie Abbilder und Ikonen. Vgl. Meynen 1998: 86.

Akten auf dem Bildschirm zu simulieren.[17] Auch nicht allein die Null und das dezimale Stellenwertsystem stellen die Mechanisierbarkeit der mathematischen Verfahren sicher. Erst der routinierte Umgang mit Wachstafeln und Papier macht Rechenwege speicherbar. Doch bis dahin ist es ein weiter Weg. Al-Hwarizmi rechnet noch auf Staubtafeln. Den arabischen Ziffern haftet nicht der Umgang mit Papier an. Sie provozieren nicht das schriftliche Rechnen. Sie optimieren vielmehr den Übertrag auf der Schreibfläche. Darum kann die Geschichte der Mechanisierung nicht linear ablaufen, die Null allein den Umgang mit den Zahlen nicht formalisieren. Erst im Verbund mit dem Papier mag die Operationalisierung glücken, die Schrift als Speichermacht jeden Rechenschritt begleiten. Aber das neue schriftliche Rechnen setzt sich erst allmählich durch. In der Zwischenzeit konkurrieren die verschiedenen Rechenflächen und die unterschiedlichen Techniken des Rechnens. In der *Margarita Philosophica Nova* von Gregorius Reisch (1502) kann man noch etwas von der Polyphonie der Rechentechniken erahnen. Zunächst erläutert Reisch die Proportionalzahlen. Er hat sie wohl von Boethius übernommen, wie sein Frontispiz verrät. Boethius beerbt Nicomachus von Gerasa, und Nicomachus von Gerasa die Pythagoreer. Danach führt Reisch – noch immer auf den Schultern der Pythagoreer stehend – in den Gebrauch der figurierten Zahlen ein. Dann legt er die Rechensteine beiseite, seine Arithmetik wird zweidimensional. Er erläutert den Umgang mit den indisch-arabischen Zahlen. Dabei verweist er auf die Grundzüge des protokollierten Übertrags bei der Division, Multiplikation und dem Ziehen der Quadratwurzel. Doch hierbei lässt er es nicht bewenden. Denn sein Lehrbuch führt weniger in die höhere Arithmetik ein, sondern orientiert sich an der Praxis. So lobt er nicht etwa das neue schriftliche Verfahren. Er erklärt vielmehr auf wenigen Seiten noch einmal die Funktionsweise des Rechenbretts.[18] Das schriftliche Rechnen ist 1502 noch so unüblich, dass das Rechenbrett in einer praktischen Arithmetik nicht fehlen darf.

Turingmaschinen stehen nicht nur für eine Dematerialisierung. Wie sehr ihre Programmierbarkeit von der Wahl der Speicher abhängt, zeigen Turings

III II I

[17] Zur Manipulation rechteckiger Pixelblöcke und der Geschichte von Bitblt und QuickDraw vgl. Michael Friedewald 1999: 323; 385.

[18] Zu den Proportionalzahlen s. Gregorius Reisch 1502: 196-199; zu den figurierten Zahlen der Pythagoreer s. ebd. 200-202; zu den indisch-arabischen Zahlen ebd. S. 203-216; zum schriftlichen Streichverfahren bei der Multiplikation S. 205, bei der Division S. 207 und beim Ziehen der Quadratwurzel S. 209-10. Die Einführung in das Rechenbrett beschreibt Reisch auf den Seiten 217-18.

Ausführungen vor der *London Mathematical Society* (1947). Über die Papyprusrollen schreibt er:

> It must have been slow work looking up references in them, and the present arrangement of written matter in books which can be opened at any point is greatly be preferred.

Aber auch die Buchseite verwirft er:

> One cannot turn a page over very quickly without tearing it... .[19]

Röhren-Flip-Flops, Magnetspulen, Rezirkulationsschaltungen müssen zwei Kriterien genügen: Adressen sollen nicht nur leicht auffindbar sein. Der Speicher muss auch löschbar sein. Keine Syntax, sondern zwei Operationen bestimmen die Speicherarchitektur: Schreib- und Leseprozesse. Denn das entscheidende Merkmal der Rechenmaschine ist, so Turing, die Löschbarkeit.[20]

Die Effizienz der Turingmaschine verdankt sich ihren Speichern.[21] Dieses Buch sucht deshalb die Universalität nicht in einer Syntax. Es folgt Turings Mediengeschichte der Rechenmaschinen im Rückwärtsgang. Für Turing ist sie nur Mittel zum Zweck. Doch Turing erwähnt die Speicher nicht zufällig. Jede Tabelle mit Instruktionen kann mit Papier, Bleistift und Radiergummi abgearbeitet werden. Die Programmierung der Turingmaschinen bezeichnet Turing deshalb als Schreibtischarbeit. Über die Universalmaschine schreibt er:

> We do not need to have an infinity of different machines doing different jobs. A single one will suffice. The engineering problem of producing various machines for various job is replaced by the office work of 'programming' the universal machine to do these jobs.[22]

So mag es nicht verwundern, wenn auch die ACE in diesem ganz speziellen Sinne eine Büromaschine ist.

> The class of problems capable of solution by the machine can be defined fairly specifically. They are those problems which can be solved by human clerical labour, working to fixed rules, and without understanding...[23]

Bevor Xerox, Windows und Mac die Benutzung des Computers den Bedürfnissen von Kindern anpassen,[24] zeichnet die Turingmaschine einen wesentlich operationaleren Zugriff auf die Büroarbeit aus. Diktat und Stenoblock sind nicht der Maßstab für die Universalmaschine. Es ist der Buchhalter an der Brunsviga. Mit der Brunsviga will Turing eine Rechenmaschine ersetzen, die schon in den 20er Jahren mit der Logik der Ersetzung wirbt. Auf einer emporgestreckten Hand strahlt das Firmensiegel der Maschinenwerke »Gehirn aus Stahl«. Sie macht

III II I

[19] Alan M. Turing 1947: 107.
[20] Alan M. Turing 1947: 108. Vgl. auch Alan Kay 1977: 236.
[21] Alan M. Turing 1947: 112.
[22] Alan M. Turing 1948: 111.
[23] Alan M. Turing 1945: 38-39.
[24] Als Beta-Tester für Smalltalk wurden 250 Kinder zwischen 6 und 15 Jahren geladen. Vgl. Alan Kay 1977: 234.

unmissverständlich klar, dass die Zeit der Fünferbündelung ein jähes Ende gefunden hat: »Fünf gute Rechner ersetzt EINE Brunsviga«. Die ACE hingegen macht die Brunsviga erneut zur Einheit einer Bündelung. An Speicherkapazität übertrifft sie eine Rechenmaschine, das »Gehirn aus Stahl«, knapp 666 Mal. Die Geschwindigkeit der analogen Rechenmaschinen will Turing optimieren, die Fehleranfälligkeit der Buchhalter minimieren.[25]
Das vorliegende Buch zieht daraus zwei Schlüsse: Einerseits verengt sich der Blick. Schreibflächen stehen im Zentrum des Buches. Andererseits soll die Aufmerksamkeit zunächst auf die Anfänge der Mathematik richten, um eine Mediengeschichte der ebenen Fläche zu entwerfen. In einem zweiten Schritt sollen dann die Techniken des Löschens und Schreibens vor der Materialität der Tafel und des Rechenbretts diskutiert und untersucht werden. Zu zeigen bleibt also, wie das Büro mit der ebenen Fläche erfunden wird und als eine Kulturtechnik beschrieben werden kann, die auf und mit der Fläche operiert. Bild, Schrift und Zahl beziehen ihre Operativität von der Fläche. Was kettet also die verschiedenen Formate von Bild, Schrift und Zahl an die ebene Fläche? Die Universalität von Schreibflächen beruht auf der Wiederbeschreibbarkeit: auf der Beweglichkeit von Zeichen. Was erzeugt die Bewegung von Zeichen? Was schreibt sie auf, wie werden sie codiert? Turing hat recht: Die Antwort ist alt. Doch lässt sie sich weniger bei den Ägyptern als bei den Griechen finden, etwa in der Notation von Operationen im Raum und auf der Fläche: in Bauplänen, mathematischen Beweisen, technischen Zeichnungen, auf dem Rechenbrett und im alphabetisierten Diagramm. Zwei Anfänge will ich diskutieren: Es sind die Alphabetisierung der Mathematik und eine verschlungene Geschichte der Null, die weniger eine Geschichte der Leerstellen als eine Geschichte der Tilgungen ist und sich weniger auf dem Papier als auf der Tafel ereignet.

Der erste Teil [A] beschäftigt sich mit dem beschrifteten Diagramm. Es verweist auf eine Kulturtechnik, die um 440 v. Chr. aus der Geometrie eine Technik des Zeigens und Verweisens macht. Er untersucht, auf welche Weise auf den Flächen der Geometrie die Abstraktion erfunden wird. Dabei werde ich zeigen, welche Rolle das griechische Vokalalphabet in seiner doppelten Funktion als Buchstaben- und Zahlschrift spielt. Aber Der erste Teil will keine Geschichte der Elementarmathematik sein. Vielmehr konzentriert er sich auf die Überträge. Er sucht die Geometrie an ihren arithmetischen Rändern auf. So liegt das Augen-

[25] Vgl. Alan M. Turing 1945: 1.

merk auf den Schnittstellen zwischen den arithmetischen und geometrischen Kulturtechniken. Der Abakus wird als Rechenbrett, Tafel und Rechteck immer wieder zum Schauplatz von Grenzübertritten.

Der zweite Teil [B] setzt auf einen Bruch. Die Römer vergessen die Griechen. Ihre Zahlzeichen bringen keine neue Geometrie hervor. Jede Zahltheorie scheint ihnen fremd. Und dennoch findet man in den groben Kerben der römischen Zahlzeichen die Anfänge des protokollierten Zeichenübertrags. So beginnt gerade mit diesem additiven Schriftsystem, das nicht zum Rechnen taugt, die Verschriftlichung und Alphabetisierung der Mathematik. Die Verschriftlichung ist mit den Routinen des Löschens eng verbunden. Ich untersuche deshalb in diesem zweiten Teil die Zahlbewegung und die Anfängen der Null in der Durchkreuzung, dem römischen Zehnt. Sie verbinde ich in einem letzten Schritt mit den Techniken der *directio* – der geraden Linie und der Abrichtung – und dem mechanisierten Zeilenvorschub: Sie soll in der Buchhaltung und der Seenavigation – den Überträgen der protokollierten Zahlenbewegung gefunden werden. Aus der römische X entsteht zunächst bei Fibonacci und Pacioli das Operationszeichen der Multiplikation. Als Operationszeichen und doppelter Federstrich universalisiert sie am Ende den Übertrag auf den Schreibflächen der Buchhalter.

Die Linien, die die Arbeit in den beiden Teilen zeichnet, sind nicht miteinander verbunden. Sie sind unstetig. Trotzdem bleiben sie wie die zwei Seiten einer Hyperbel über eine gemeinsame Achse aufeinander bezogen. Im Mittelpunkt steht die Erfindung der Fläche und ein Ding: der Abakus. Er garantiert als Schreibtafel, Rechenbrett und Medium der Diagramme die Einheit von Schreiben und Löschen. Reduziert auf seine Fläche gründet das Büro auf der wiederbeschreibbaren Tafel. Die Tafel ist Codierungsmacht. Sie ermöglicht es nicht nur, Vorgänge zu operationalisieren, Maschinenzustände anzuschreiben, sondern auch Imperien, Ministerien, Räume, Personal, Schreibtische an Schreibflächen zu mandieren. Die Anfänge, denen die Arbeit nachgeht, sind weniger gefunden als gesetzt. Sie sind das Produkt von Überträgen. Das Diagramm entspringt den Aufschnürungsverfahren der ionischen Tempel, der Astronomie des Gnomon und der pythagoreischen Musiktheorie, die Null den Techniken der Seenavigation und Buchhaltung. Im ersten Fall leisten geometrische Linien und Buchstaben den Übertrag, im letzten Fall Seewege und regelgeleitete Zeilenvorschübe. Beide agieren auf einer ebenen Fläche. Aber Seewege und Doppelte Buchhaltung nutzen die euklidische Fläche nicht mehr zur Abstraktion. Die Seefahrer und Buchhalter haben Griechenland verlassen, sie haben die zahllosen Inseln womöglich niemals betreten. Denn die Enden des mechanisierten Zeichenvorschubs zielen nicht auf

Idealität, sondern auf Navigation. Navigation hingegen beruht auf dem Übertrag, der Übertrag auf dem doppelten Federstrich: dem Zeichen der Tilgung. Im Zentrum stehen in beiden Fällen Konstruktionswege: Es sind Rechenvorschriften und Zahlwege, Routen und Routinen.

Noch einmal zur Null: Die Diva des dezimalen Stellenwertsystems markiert eine Episode, aber keine Zäsur, weil sie auf vielen mathematischen Oberflächen zuhause ist und erst spät mathematische Operationen verschriftlicht. Die Null findet man etwa auf den Rechensteinen Gerberts. Sie besiedelt die Staub- und Wachstafel al-Hwarizmis und Fibonaccis, ehe sie auf der Papieroberfläche endgültig das schriftliche Rechnen begründet. Dieser lange Weg, den die Null vom Abakus zur Papieroberfläche zurücklegt, ist deshalb so bemerkenswert, weil die Ziffern ihre entscheidende Funktion – die Operationalisierung der Leere – den Löschroutinen des Rechenbretts verdanken. Darum muss eine Archäologie der Schreibflächen, die den Spuren der Operationalisierung folgt, nicht mit der Null, sondern mit der Erfindung der Fläche, dem Abakus, beginnen. Denn der Abakus ist das erste Universalmedium.

A

DIE ERFINDUNG DER EBENEN FLÄCHE

DER ABAKUS ALS UNIVERSALMEDIUM

Dieses Buch will den Spuren der Geometrie folgen. Dass ist ein scheinbar paradoxes Unterfangen. Denn die Geometrie handelt von abstrakten Gegenständen. Die Aussagen der Geometrie sind nicht wahr, weil sie sich auf irgendeine Realität beziehen. Vielmehr stellt die Geometrie Wahrheit selbstreferentiell her. Sie handelt mit Aussagen, die Sinn erzeugen, indem sie aufeinander zeigen und verweisen. Ihre Aussagen gründen nicht auf Einzelsätzen, sondern Systemen. Diese Systeme beginnen mit Axiomen, die so einsichtig sind, dass sie nicht weiter begründet werden müssen. Dann folgen Definitionen und Postulate. Dies sind die Bausteine, aus denen die deduktive Geometrie seit Euklid ihre Aussagen formt. So entsteht ein System, das nur die Axiome als Fluchtpunkt kennt. Das System genügt sich vollkommen selbst. Anschauung und Materialität liegen ihm fern. Die Geometrie entwickelt ihre Gegenstände also in einer Art von Reinraum. Ihre Aussagen sind zeitlos gültig. Es gibt keinen Tatort. Denn der Mathematiker hinterlässt bei der Arbeit keine Spuren. Der Beweis zeigt nicht den Gedankengang. Er zeigt nicht die Irrwege, die Niederlagen und die Verzweiflung. Denn ein klassischer Beweis ist erst schön, wenn er kurz ist. Geradlinigkeit und Kürze sind ein ästhetisches Gebot. Die Lösung kommt deshalb ganz leicht daher. Denn sie scheint nur der Logik zu folgen. Der Beweis stellt also nicht die Arbeit des Mathematikers aus. Er zeigt, wie Aussagen, Konstruktionen oder Eigenschaften scheinbar ohne Zwang auseinander hervorgehen. Am Ende entspringt alles der Axiomatik der mathematischen Gegenstände: Aus A folgt B und aus B folgt C. Q. e. d. – »Das galt es zu zeigen/das galt es zu beweisen«.

Wo bleiben also die Spuren der Geometrie, wo sind sie zu finden? Das vorliegende Buch entwirft eine Geschichte der Abstraktion und Idealität. Dazu sucht es die Werkstatt der Mathematiker auf. Dort finden sich nicht nur Zirkel und Lineal, sondern Papier und Bleistift, Tafel und Kreide. Diese Werkzeuge sind keinesfalls austauschbar. Sie sind ebenso elementar wie Punkt, Linie und Fläche. Sie formen die mathematischen Aussagen, es sind Denkwerkzeuge. Den Spuren der Geometrie folgen, heißt also den Blick auf diese Werkzeuge lenken. Warum fällt die Wahl gerade auf Zirkel und Lineal? Wie werden die Werkzeuge ausgesucht? Welchen Einfluss haben sie auf die Aussagen der Geometrie? Abstraktion und Idealität entsteht zunächst als Verweistechnik, die mit den Diagrammen in engster Verbindung steht. Erst als die Griechen, vermutlich um 440 v. Chr., ihre Diagramme mit Buchstaben versahen, konnten sie von einem sichtbaren Gegenstand auf einen unsichtbaren verweisen. So konnten sie über die Verweistechnik des Diagramms, so etwas wie Gleichförmigkeit erzeugen. Da die beschrifteten Diagramme wie Zeiger funktionierten, konnten sie ihre Gegenstände formatieren und uniformieren. Ein gezeichnetes Objekt, verwies auf viele Dinge. Der Verweis garantierte, dass die Dinge einer Klasse von Dingen angehörten, die alle die gleichen Eigenschaften teilten. Erst die Bildlichkeit des Diagramms ermöglicht die Bildlosigkeit der Abstraktion. Proklos, der das erste Buch von Euklids *Elementen* kommentiert, schreibt, die Geometrie vermittle zwischen der Welt und den Ideen. Ihre Aufgabe sei »bildlose Schau«. Bildlosigkeit und Bildlichkeit, Abstraktion und Materialität sind also miteinander verwandt. Sie bedingen einander. Deshalb kann man auf der Tafel und dem Diagramm die Spuren der Idealität sichtbar machen. So scheint es sinnvoll, eine Geschichte der Idealität und Abstraktion mit einer Mediengeschichte der Tafel zu verknüpfen.

Sie müsste zeigen, welche Funktion die Medien in der Mathematik haben. Doch wenn man meint, man müsse sie nur zu lesen wissen, dann hat man die Rechnung ohne die Mathematiker gemacht. Denn sie haben seit Euklid *per definitionem* jede Spur ihrer Materialität getilgt. Euklid stellt den meisten Büchern der *Elemente* »Prinzipien« voran. Axiome, Postulate, und Definitionen klären die Grundannahmen, sie führen die einfachsten geometrischen Objekte ein, ehe Euklid mit ihnen operiert. Diese Ordnung sollte nicht nur die Mathematik revolutionieren. Die Trennung von Prinzipien und Folgerungen werden spätestens ab dem 5. Jahrhundert v. Chr. zum Handwerkzeug der Wissenschaft. Schon der erste Satz des 1. Buches definiert den Punkt und der zweite die Linie. Die Postulate 2 und 3 beschränken die Wahl der Werkzeuge auf Zirkel und Lineal. Nur mit ihnen dürfen die Beweise und Konstruktionen vollzogen werden. Doch was so geordnet beginnt, lässt Fragen zurück: Nicht alle Voraussetzungen werden genannt. Worauf werden diese Beweise vollzogen? Die Elemente bleiben stumm. Bei Euklid findet sich kein Hinweis auf das Diagramm, keine Anmerkung auf den Sand und Staub einer Tafel. Die Geometrie, so schreibt Proklos mit Platon*f*, »belehrt in Bildern über die Eigenschaften der göttlichen Ordnungen und die Kräfte der intellektuellen Formen«.[26] Sie ist die Mittlerin zwischen der Welt und den Ideen. Die Geometrie ermöglicht es, Idealität und Abstraktion erstmals zu denken. Auf ihren Tafeln tauchen erstmals Gegenstände auf, die nur im Gedanken existieren. Doch das hat seinen Preis. Die Geometrie kann nur verallgemeinern, wenn sie gegen ihre eigene Materialität blind ist. Sie muss buchstäblich im staubfreien Raum operieren. Das machen schon die ersten Sätze Euklids unmissverständlich klar:

ǀǀǀ ǀǀ ǀ

[26] Proklos 209.

> Ein Punkt ist, was keine Teile hat.
> Eine Linie breitenlose Länge.[27]

Jede Spur im Sand, jedes Zirkelloch, jeder gezogene Strich ist nur eine Äußerlichkeit. Sie können den Gang der Beweise nicht beeinflussen. Die Zeichnung fügt dem Wesen der Geometrie nichts hinzu. Erst die Immaterialität scheint die Strenge der geometrischen Beweise zu erzeugen. Diese Voraussetzung hat der Mathematik viel Spott eingebracht. In Wells' *Time Machine* gibt es einen Vertreter des gesunden Menschenverstandes, der nicht so leicht zu betrügen ist: Er heißt Filby, der seinen Namen wohl von »Filbert«, der Frucht des Haselnußstrauches, geborgt hat. Auf seine Hartnäckigkeit trifft der Zeitreisende gleich zu Beginn, um ihm zu verdeutlichen, mit welchen widersinnigen Annahmen die Schulgeometrie operiert:

> ›Die Geometrie..., die man Sie in der Schule gelehrt hat, beruht auf einer völlig falschen Voraussetzung.‹
>
> ›Ist das nicht ein ziemlich starkes Stück, das Sie uns da gleich zu Beginn vorsetzen?‹ meinte Filby, ein streitsüchtiger Mann mit rotem Haar.
>
> ›Ich möchte nicht von Ihnen verlangen, irgend etwas ohne vernünftigen Grund anzunehmen, doch Sie werden mir Ihre Zustimmung nicht versagen können. Natürlich wissen wir, dass eine mathematische Linie, eine Linie der Stärke *Null*, in Wirklichkeit nicht existiert. Das hat man Sie doch gelehrt? Ebensowenig existiert eine mathematische Fläche. Diese Dinge sind bloße Abstraktionen.‹[28]

Der Zeitreisende beteuert auf der Suche nach der vierten Dimension, dass die klassische Geometrie die Zeit verschweigt. Doch könnte er mit ähnlichen Argumenten zweifeln, ob man die Materialität von Punkten, Linien und Flächen vollständig ausblenden kann. Was ist schon eine Linie mit der Stärke Null? Die gleiche Künstlichkeit zeichnet den Beweis aus. Es scheint, als sei der Beweis ohne Umwege aus Definitionen und Theoremen hervorgegangen. Es scheint, als entspringe er einer fehlerfreien Analyse. Jeder Beweis folgte damit einer Mechanik, die ohne Zweifel ist. Doch Abstraktion, Axiomatik und Formalisierung sind keineswegs schon von Anfang an da. Ein Beweis folgt keineswegs einem geraden Weg. Die Mathematiker müssen Fälle unterscheiden, Daten frisieren. Sie finden womöglich nur auf Umwegen den kürzesten Weg. Die gerade Linie ist keineswegs schon da. Stringenz und Kürze werden erst mühsam hergestellt. Doch das bleibt ungesagt. Der Einblick in die Werkstatt des Mathematikers ist kategorisch ausgeschlossen. Denn die Niederschrift dreht die Blickrichtung um: Der deduktive Beweis schlägt sich nicht mit Materialitäten und Irrwegen herum. Denn jeder Umweg störte die Kommunikation zwischen der Welt und den Ideen. Er gefährdet die Universalität

[27] Euklid: Elem. I def. 1 und 2.
[28] H. G. Wells 2004: 5-6.

des Beweises. Wenn die Schönheit der klassischen Beweise in ihrer Kürze liegt, so ist Mathematik eine besondere Form der Hygiene. Sie tilgt nicht nur alle Umwege und Irrwege, sondern auch alle Spuren von Materialität.

Eine Mediengeschichte der Mathematik muss deshalb zu einem mühseligen Geschäft werden. Sie muss die Werkstätten der Mathematiker freilegen, Archäologie auf ein Wissen anwenden, dass erklärtermaßen aus zeitlosen Sätzen besteht, aus Sätzen, die keine Geschichte haben. Diese Sätze machen deshalb schon jede Archäologie zu einem sinnlosen Unterfangen. Dabei ist es gerade die Geschichte dieser Zeitlosigkeit, die an den Aufzeichnungsflächen sichtbar wird. Sie versucht dieses Buch zu schreiben. Wie die Naturwissenschaftler, so scheint es, arbeiten die Mathematiker in einer Art Labor. Ihre Beweise sind Experimente. Sie können glücken. Doch meistens schlagen sie fehl. Dieses Scheitern – die Rückschläge, die ungezählten Neubeginne, die Bastelarbeit – bleibt unerwähnt. Nur in einem einzigen Fall wird der Fehlschlag stilisiert. Er wird selbst zum Teil des Arguments – bei der *reductio ab absurdum*. Doch der Umschlag von der falschen Annahme zur richtigen Annahme bleibt seltsam nebulös. So haftet dem indirekten Beweis etwas von einem Zaubertrick an. Wiederum bleibt der Blick in die Werkstatt verwehrt. Zu Beginn, so mag man vermuten, sieht der Mathematiker den Wald vor Bäumen nicht. Am Anfang stehen also nicht Prinzipien, sondern Annahmen, die als wahrscheinlich gelten, aber nicht abgesichert sind. Denn irgendwo muss man schließlich beginnen. So gehören auch hier Ausprobieren und Umschreiben zum Alltag. Am Anfang herrscht Blindheit. Wie häufig findet eine Gleichung keine Lösung? Wie selten vermag eine Konstruktion den gewünschten Grad von Allgemeinheit erlangen? Die lückenlose Deduktion bildet keineswegs einen Konstruktionsweg ab. Sie wird nachträglich erzeugt. Sie ist nicht mehr als ein Produkt mühsamer Bastelarbeit. So kann man vermuten, dass auch in der Mathematik Stricheln, Kritzeln, Streichen alltägliche Formen der Aufzeichnung sind.[29] Wenn nicht Prinzipien, sondern Aufschreibe- und Anzeichnungspraktiken die Arbeit der Geometrie bestimmen, dann erscheinen auch ihre Objekte in einem anderen Licht. Die Idealität der geometrischen Gegenstände ist keineswegs so zeitlos, wie es scheint. Auch sie unterliegen dem mathematischen Tuning. Eine spezifische Form der Hygiene nimmt ihnen jede Anschaulichkeit und Materialität. Die Hypotenuse, der rechte Winkel, das Trapez, selbst die Vollkommenheit von Kreis und Quadrat sind Abstraktionen alltäglicher Phänomene. Sie sind der Ausdruck einer Aufschreibekon-

III II I

[29] Hans-Jörg Rheinberger 2005: 84.

vention, die den geometrischen Gegenständen jede Gegenständlichkeit verbietet. Doch die Gegenständlichkeit ist nicht nur peripher, sondern bestimmt bis zu einem gewissen Grad noch immer den Operationsradius dieser Gegenstände. Eine Mediengeschichte der Mathematik muss deshalb *reverse engineering* betreiben, die Geschichte des Schließens als eine Kulturgeschichte des Ausschlusses begreifen. Auf der Nachtseite der Mathematik befindet sich eine Art Labor. Hier liegt die Werkstatt der Mathematiker, die jede Spur der Aufzeichnung löscht und konkrete Gegenstände so optimiert, dass sie als Idealitäten die Werkstatt verlassen. Sätze und Gegenstände werden dabei so miteinander verbunden, dass sie einer logischen Reihung folgen. Diese Werkstatt enthält nicht nur die Spuren des »Kritzelns«, sondern auch die Geschichten seiner idealen Gegenstände. In ihr fallen zuerst die Widersprüche in den Blick, die auf der Tagseite verborgen bleiben: Welchen Einfluss besitzt die Visualität auf die Produktion von Idealität? Wie wird notiert? Welchen Einfluss haben die Bild- und Rechenflächen der Mathematik auf ihre Operationen? Woher stammen sie, welchem konkreten Kontext werden sie entrissen? Dieses Buch sucht die Werkstätten der deduktiven Geometrie und hofft, dass sich ihre Türen über eine Kulturgeschichte der geraden Linie einen Spalt breit öffnen. Doch warum gerade die gerade Linie? Ist sie nicht so selbsterklärend einfach? Jedem steht sie doch vor Augen. Aber gerade das nährt die Zweifel. Warum verbindet sich mit ihr Geradheit, Richtigkeit und Wahrheit? Die gerade Linie bläht sich auf, sie ergreift Raum und bestätigt den Verdacht. Sie kanonisiert. Die Intuition ist Diskurs. Denn die gerade Linie ist die wirkungsmächtigste Konvention der euklidischen Bildflächen. Sie tilgt die krummen Linien. Parabeln, Hyperbeln, Spiralen und Freihandkurven finden in das Universum der Planimetrie keinen Einlass. Man muss also am anderen Ende anfangen, nicht bei der Geometrie und ihren Annahmen – der Strenge und der Schönheit ihrer Beweise. Die euklidische Definition von Punkt und Linie korrigiert Alberti. In seinen *Grundlagen der Malerei* [*Elementa Picturae*, 1450-55] schreibt er:

> 1. Ein »Punkt«, behaupte ich, ist in der Malerei ein so winziger Tupfen – durchaus vergleichbar einem Atom –, dass keine Hand irgendwo einen kleineren zustande bringen könnte.
>
> 2. »Linien« sind feinste Striche, die von Punkt zu Punkt verlaufen...[30]

Albertis Punkt ist zwar nicht mehr als hingehaucht, doch wahrnehmbar. Er ist ein gemaltes Zeichen. So schreibt er gegen die Kritiker seiner *Grundlagen* an:

> Punkte und Linien sind hier für die Maler nicht das, was sie für die Mathematiker sind; denn für diese finden unendliche viele Punkte auf einer Linie Platz. Nach mei-

[30] Alberti: Elementa Picturae C 1.-2.

> ner Definition ist ein Punkt ein Zeichen, das der Maler wahrnimmt gleichsam als etwas in der Mitte zwischen einem mathematischen Punkt und einem Größenverhältnis, das in Zahlen ausgedrückt werden kann...[31]

Alberti entreißt den Punkt nicht nur für den Maler der Unsichtbarkeit. Er ignoriert vielmehr die Abstraktion. Er ist gegen jede Form mathematischer Idealität immun. Und so glaubt man, in seiner Verteidigung einen ironischen Unterton wahrzunehmen. Es scheint, als begleiteten Albertis Definitionen ein sehr leises, aber unüberhörbares »Nein«: Der Punkt ist mehr als »ein Stich, ein Loch, das aus der Welt der Größen und Ausdehnungen herauszufallen scheint und doch Anfang und Ende all dieser Dinge bildet«.[32] Die Maler des 15. Jahrhunderts können die Prinzipien nicht so blutleer setzten wie die euklidische Geometrie. Denn ihre Bilder verweisen nicht auf ein Jenseits. Sie haben eine Ausdehnung. Sie haben eine Tiefe. Das ist ihre Entdeckung und Alberti ihr Sprachrohr. Er beschreibt in seinem Traktat *Della Pittura* die Distanzpunkt-Methode und zeigt, wie man Bilder mit dem Sog der Tiefe versieht. Alberti profitiert vom analytischen Blick Euklids. Von Euklids *Elementen* besitzt Alberti ein Manuskript vom Ende des 13. Jahrhunderts, das Campanus v. Novara übersetzt und kommentiert hat.[33] Eine weitere Quelle ist die *Practica Geometriae* von Fibonacci, auf den ich noch später zu sprechen komme. Mit diesen Büchern stellt Alberti die Malerei auf euklidische Grundlagen. Er bedient sich dabei nicht nur ihrer Form, indem er neben Punkt und Linie, die Umrisslinie, die Fläche, zu Elementen des Bildes macht. Er formuliert mit seinen neuen *Elementen* auch dezidiert eine Kritik: Punkt und Linie, die bei Euklid noch aus der Welt heraus zu fallen drohen, holen Albertis *Elemente* wieder hinein. Denn gerade bei der Definition des Punktes und der Linie scheint das Handwerkzeug des Malers mit dem des Mathematikers zu verschmelzen. So drängen mit den künstlerischen auch die mathematischen Graphismen in den Blick: der mathematische Punkt, der messbar ist, die Linie, die nicht viel mehr als ein Strich ist. Der Unterschied zwischen den Malern und Mathematikern ist nur eine ideeller. Er verweist auf eine Zeichenkonvention der Geometer. Sie zeichnen Striche, aber meinen Linien. Sie malen Zeichen, aber meinen Punkte ohne jede Ausdehnung. Sie operieren mit Diagrammen, ignorieren aber ihre Materialität. Diese Blindheit ge-

III II I

[31] Zit. n. Bätschmann, Oskar & Christoph Schäublin 2000: 367.

[32] Wolfgang Schäffner 2003: hier 203. Für die Modifikationen, die die praktische Geometrie an Euklid vornimmt, vgl. S. 204. Zum gezeichneten Punkt bei Daniel Schwenter, dem »punctum physicum«, der messbar ist, S. 208-209.

[33] *Elementorum libri*. Ins Lateinische übersetzt und kommentiert v. Campanus von Novara. Handschrift um 1300, lat. VIII, 39, Venedig, Bibliotheca Nazionale Marciana. Vgl. den Ausstellungskatalog *Leon Battista Alberti*. Hg. v. Joseph Rykwert & Anne Engel. Mailand 1994. S. 443.

hört zur Profession. Aber ihre Blindheit ist keineswegs voraussetzungslos. Sie gründet in einer Geschichte der Abstraktion. Will man diese erzählen, so muss man die Aufmerksamkeit auf die Materialität und die Zeichenpraktiken wenden. Sie lassen jeden Geometer an der Tafel zum Maler werden. In diesem Buch soll seine Metamorphose der Mathematiker an einem Beispiel, der geraden Linie, untersucht werden. Deshalb ziehen sich die Aufzeichnungskonventionen der geraden Linie wie ein roter Faden durch das Buch. Viele Fragen sind mit der geraden Linie verbunden. Auf welchem Weg gelangt sie auf die Bildflächen der Geometrie. Wie wird sie erzeugt? Wo taucht sie zum ersten Mal auf? Was macht sie zum Werkzeug des deduktiven Schließens? Aber die wichtigste Frage ist noch nicht gestellt. Auch die gerade Linie ist wenig intuitiv. Dass sie die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten sei, wie Archimedes behauptet, gilt nur in der Geometrie der Ebene. Es ist eine Konvention. Die gerade Linie ist der Anschauung nicht unmittelbar gegeben. Sie wird hergestellt und muss sich erst – wie ich noch zeigen werde – mühsam gegen ihre krummen Konkurrenten durchsetzen. Was stellt also die unwahrscheinlichste aller Linien auf die Tagseite des deduktiven Schließens? Was verdammt die krummen Linien auf die Nachtseite der euklidischen Geometrie?

Der Schwerpunkt dieses Buches liegt auf einer Kultur- und Mediengeschichte der Geometrie. Es konzentriert sich damit zugleich auf einen Gegenstand, der noch heute in jedem Hörsaal, und fast jedem Mathematikerbüro zu finden ist. In Cambridge, im *Issac Newton Institute*, ist er allgegenwärtig. Man begegnet ihm sogar im Aufzug und auf den Toiletten.[34] Dieses Ding ist ein stummes Relikt aus alten Zeiten. Nicht mehr als ein Fossil. Und dennoch hat es jeder Verdrängung durch Folien und Powerpoint standgehalten. Schon die Babylonier kannten die Tafel, die Ägypter nutzten sie. Die Griechen entwickelten aus dem Tafelbild sogar ein eigenes Wissensgebiet. Es operiert mit ebenen Flächen: die Planimetrie. Die Tafel kann zur Reliquie werden. Tafeln, die Einstein beschrieben hat, werden in Cambridge und Nottingham aufbewahrt. Nachdem Andrew Wiles glaubte, er habe den letzten Satz Fermats bewiesen, lässt er sich vor der Tafel ablichten. So erfährt das Tafelbild bei den Mathematikern eine Neudefinition. Es ist weniger Ausdruck einer Macht, sondern stummer Zeuge des vollzogenen Beweises. Wiles' Bild vor der Tafel scheint zu zeigen: q. e. d. – das galt es zu beweisen und ich habe es am 23.6.93 getan. Der Beweis ist in der Welt, denn er wurde vor 400 Augen

[34] Simon Singh 2000: 29.

vollzogen. Wenn jemand auf der Tafel einen einzigen Fehler findet, so mag er hervortreten. Als Andrew Wiles sich umwendet und mit einem unsteten Blick ins Ungefähre die Arbeit quittiert, wird es laut: Applaus brandet auf. Aber Wiles muss nicht lange auf seine Zweifler warten. Denn sein Beweis ist nicht lückenlos. Sein Schicksal ist so sichtbar mit der Tafel verbunden, dass er zusammen mit seinem Schüler Richard Taylor erst 14 Monate später den Satz von Fermat endgültig beweisen kann.

> Wiles' proof has essentially the same classical, deductive form that Euclid's geometric theorems did. It does not involve any computation and it claims to be absolutely – not probably – true,

schreibt John Horgan.[35] Wiles' Tafel ist ein stummer Zeuge einer alten Praxis, die sich bis heute gehalten hat. Beweisen heißt nachvollziehen. Und dieser Nachvollzug verlangt nach Öffentlichkeit. Zunächst passiert er die *peer group* – jene Handvoll Experten, die den Beweis tatsächlich noch versteht, dann folgt die Veröffentlichung in den Fachpublikationen. Nun kann theoretisch jeder den Beweis an der Tafel nachvollziehen, wenn er zumindest einen Teil der Intelligenz und Hartnäckigkeit von Wiles besitzt. Die Veröffentlichung garantiert den Nachvollzug. Wiles hat seinen Beweis, so heißt es, vollständig mit der Hand geschrieben. Eine Sekretärin musste ihn tippen.[36] Warum die Handschrift? Wiles, so scheint dieses Detail zu verraten, schreibt selbst. Er unterliegt keinen Einflüsterungen. Er hat den Beweis mit der eigenen Hand vollzogen und ihn anschließend an der Tafel allen Augen dargeboten. Augenzeugenschaft und Nachvollzug sichern die Wahrheit seines Beweises.

Die formale Mathematik ist im Kern immer noch euklidisch. Euklid hat die Augenzeugenschaft mit Tafel und Diagramm systematisiert. Beweisen heißt dort konstruieren: »man verschaffe sich die Kreismittelpunkte« – »durch C ziehe man die Parallele CE« (I 32) – »man zeichne über CB das Quadrat CDEF«, so heißt es unentwegt. Und selbst die so genannten arithmetischen Bücher lassen Zirkel und Lineal nicht ruhen. Jedem Mosaikstein eines Beweises entspricht bei Euklid einer Operation an der Tafel. Die euklidischen Beweise sind Handlungsanweisungen. Tue dies, dann das..., dann erhältst du das Gesuchte. Weil Beweise bis zu Wiles den Vollzug verlangen, finden sich die Spuren der Tafel bis ins 20. Jahrhundert. Doch nicht alle 200 Seiten von Wiles' Beweis waren aus deduktiven Schlüssen gewonnen. Ein entscheidender Teil bezog sich auf die Taniyama-Vermutung, die in

[35] John Horgan 1993: 94.
[36] John Horgan 1993: 94.

den 70er Jahren mit Hilfe eines Computers aufgestellt worden ist. Wie sehr die Mechanisierung der formalen Schlüsse mit der formalen Mathematik bricht, zeigt der erste Computerbeweis. Er geht auf die Mathematiker Haken und Appel zurück. Sie erklärten 1976, den Vier-Farben-Satz maschinell bewiesen zu haben. Die Lösung war nicht mehr persönlich nachprüfbar, das Tafelritual an seine Grenzen gestoßen. Doch der Beweis war nicht vollständig automatisiert. Haken und Appel mussten zunächst formal darlegen, welche Teile des Beweises berechenbar sind und somit von einem Computer übernommen werden konnten. So haben sie die Allgemeingültigkeit des Vier-Farben-Satzes auf eine endliche Anzahl von Fällen reduziert.

> ...we decided to prove formally that the procedure would provide a finite unavoidable set of geographically good configurations. We had to put aside the experimental approach and describe the total procedure. It was necessary to prove that all cases that had been covered and that those cases that were not handled by the computer program were as simple as they appeared to be.[37]

Nur das Verfahren wird mit konventionellen Mitteln dargelegt. Den Rest der Arbeit versehen drei Computer. Sie laufen 1200 Stunden. Zunächst müssen sie sich ihre eigenen Daten generieren. Das erledigt ein Programm, das aus der Flut der möglichen Karten Grundfigurationen generiert hat. Es zählt 1482 Farbvariationen. Das Programm ist »selbstmodifizierend«, wie Appel und Haken versichern. Nachdem die Computer die nötigen Karten generiert haben, greift kein Mathematiker mehr ein. Die Beweisführung übernimmt ein Programm, das die Kombinationen errechnet. Nicht Logik und Stringenz, sondern reine Rechenkraft legt den Schluss nahe, dass jede Karte mit nicht mehr als 4 Farben so eingefärbt werden könne, dass es ausgeschlossen bleibt, dass Felder gleicher Farbe aneinander grenzen. Das Ergebnis war nicht eindeutig. Es lieferte keine zeitlosen Wahrheiten. Die Wahrheit, die die drei IBM-Computer berechnen, besitzt eine hohe Wahrscheinlichkeit. Die experimentelle Mathematik liefert keine zeitlosen Beweise. Sie beendet die Macht der Tafel. Das wird schlagartig klar. Darum wird der maschinelle Beweis des Vierfarbensatzes kontrovers diskutiert. Die neue Mathematik ist verwundbar. Über das neue Unbehagen schreibt H. P. Swinnerton-Dyer:

> Wenn ein Satz mit Hilfe eines Computers bewiesen wurde, ist es unmöglich, eine Darstellung des Beweises zu liefern, die den Anforderungen der herkömmlichen Prüfung genügt – dass nämlich ein hinreichend geduldiger Leser in der Lage sein sollte, den Beweis durchzuarbeiten und seine Richtigkeit zu bestätigen.[38]

Bevor die experimentelle Mathematik die Tafel in den Ruhestand schickt, sie ganz aus den Hörsälen verschwindet, sollte man sie befragen: Welches Ritual bindet

[37] Appel & Haken 1977: 117.

[38] Zit. n. Simon Singh 2000: 334.

die Mathematik an die Tafel? Was wird auf ihr vollzogen? Warum war sie so erfolgreich? Antworten soll eine Kulturgeschichte der Tafel liefern. Sie soll klären, wie die Tafel zum wichtigsten Instrument einer beweisenden Wissenschaft aufsteigt, die ihr Wissen an zwei Kulturtechniken knüpft: Zeigen und Verweisen. Das sind die wichtigsten Operationen der Tafel. Indem die Tafel zeigt, genügt sie der Augenzeugenschaft – das galt es zu zeigen, jenes zu konstruieren und hier ist es zu sehen. Indem die Tafel verweist, kann sie das Gezeigte verallgemeinern. Denn die Kritzeleien sind nur ein Abbild idealer geometrischer Objekte. Ihre Graphismen, die Krümmung der Linie, die Ausdehnung des Punktes, sind zu vernachlässigen. So scheint das Tafelbild unaufhörlich eine fraglose Wahrheit zu bestätigen: »Es ist so, es war so und es wird immer so sein«. Die Wahrheiten der Tafel sind dauerhaft. Eine Kulturgeschichte der Tafel muss sich also mit widerstreitenden Tendenzen beschäftigen. Die Geste des Zeigens setzt auf die Anschaulichkeit der Diagramme. Sie verweist auf den deiktischen Aspekt der Zeugenschaft. Die Verweisfunktion hingegen reist die Bilder am liebsten wieder ein. Sie stellt den ikonoklastischen Aspekt der Abstraktion in den Vordergrund. Die Tafel ist also beides zugleich – glaubhafter Zeuge mathematischer Bilderverehrung und glühender Vertreter der Bilderstürmer. Didaktik und Visualität – wie geht das zusammen? Ich will nachfolgend weniger zeigen, wie die Tafel diesen Widerspruch aushält, als vielmehr, dass diese doppeldeutige Haltung zur Visualität die Karriere der Tafel erst ermöglicht.

Wie entscheidend dieser Widerspruch die Tafel prägt, zeigt seine Geschichte. Der erste Auftritt ist eng mit einer Erfindung verbunden, die den griechischen Geometern es ermöglicht, mit Bildern auf bildlose Objekte zu verweisen. Sie verweist auf ein Gebilde aus Linien und Buchstaben. Das beschriftete Diagramm hat vermutlich Hippokrates von Chios, nicht der Mediziner, sondern ein Geometer, zum ersten Mal um 440 v. Chr. in seinen Möndchenbeweisen verwendet. Nicht minder prominent, aber unter anderem Vorzeichen, findet man eine bildlose Visualität auch in der Arithmetik. Als Rechenwege notiert, Zehnerüberträge verschriftlicht werden, macht die Arithmetik erneut extensiven Gebrauch von der Fläche. Die Anfänge der Algebra und die Arithmetik der Stelle, die die Null und das neue dezimale Stellenwertsystem ermöglichen, rechnen mit der Fläche. An diesen beiden Nahtstellen, dem Diagramm und den Anfängen der Schriftlichkeit in den Konstruktions- und Beweisketten der Mathematik will ich die Wissens- und Mediengeschichte der Fläche ausrichten. Über sie will ich ihren merkwürdigsten Zug, die Anschaulichkeit in der Abstraktion, genauer bestimmen. Der erste Teil bezieht sich auf den bildlosen Verweis: Woher kommt die seltsame Technik, die mit Bildern Abstraktion erzeugt? Diese Frage ist gar nicht einfach zu beantworten und eigentlich ein wenig hypothetisch, weil man von der Existenz der Tafel absehen muss. Denn das Diagramm erzeugt ja erst die Tafel als Instrument des Wissens. So soll zunächst die Aufmerksamkeit auf Kulturtechniken gelenkt werden, die mit der Tafel wenig gemein haben. Astronomische Messtechniken und Tempelbau sind Techniken, die nicht genuin griechisch sind. Pythagoras war in Ägypten, Thales und Anaximander ebenso. Am Anfang stehen Kontinuitäten, ehe mit dem beschrifteten Diagramm Abstraktion und Idealität gedacht werden können. Die Frage nach der Schrift in der Mathematik ist nur scheinbar von der ersten entkoppelt. Denn die Schrift findet über die Geometrie Eingang in die Mathematik. Das geschieht, wenn zu jeder Multiplikation ein Rechteck imaginiert wird, jede Addition als Summe zweier Flächen aufgefasst wird, wenn Arithmetik über die Geometrie veranschaulicht wird. Von dort ist es nur ein kleiner Schritt zum Einfall Fibonaccis, jedem Aufgabentyp ein spezifisches Diagramm zuzuordnen. Das dezimale Stellenwertsystem wiederum rechnet mit Stellen. Es bricht die kontinuierliche Fläche der Tafel auf, segmentiert sie, um mit der Geometrie Zahlen zu adressieren. Aus der bildlosen Schau entsteht so die Abstraktion, aus Zahlen, die eine Lage haben, das schriftliche Rechnen. Die Tafel, so kann man vermuten, definiert sich an den Nahtstellen zwischen geometrischen und arithmetischen Kulturtechniken immer wieder neu. Die Routinen, die das neuzeitliche Büro auf diese Weise bestimmen, sowie die Formalisierung von Vorgängen und ihre Wiederholbarkeit, haben ihre Wurzeln in zwei Schauplätzen: erstens im Diagramm und den Anfängen der Abstraktion und zweitens im Protokollieren von Zahl- und Rechenwegen, kurz der Verschriftlichung der Mathematik.

Die Fragen an die Erfindung der Fläche konzentriere ich im ersten Teil auf den Abakus. Der Abakus hinterlässt eine bewegte Geschichte, weil er Rechenbrett und Zeichentafel zugleich ist. Für die Protokollierung der Rechenwege ist es dagegen von nicht geringer Bedeutung, dass der Abakus im 6. Jahrhundert weniger ein Hilfsmittel der Arithmetik als der Geometrie ist. Schon in diesem Jahrhundert wird der Umgang mit dem Abakus zu einem festen Bestandteil des Geometrieunterrichts. Er gehört zum Quadrivium.[39] Martian kann hier als Kronzeuge gelten. Die *Hochzeit von Philologia und Merkur* [de nuptiis Philologiae et Mercurii], eine allegorische Enzyklopädie des Wissens, war im Mittelalter mit nicht weniger als 243

[39] Vgl. dazu Werner Bergmann: Innovationen im Quadrivium des 10. und 11. Jahrhunderts. Studien zur Einführung von Astrolab und Abakus im Lateinischen Mittelalter. Stuttgart 1985. S. 177f.

Handschriften sehr verbreitet.[40] Bei Martian tritt *Geometria* mit einem Abakus auf. Der Abakus sei...

> ein Ding, das dazu bestimmt ist, jede Gestalt abzubilden; Dort können sowohl die Züge der Linien, als auch die Krümmung der Kreise, die Winkel der Dreiecke eingezeichnet sein. [...] Die Tafel ermöglicht es, die Umlaufbahnen und Kreise der Erde, die Gestalt der Elemente hervorzubringen und selbst den Durchmesser der Erde zu durchmessen. Du findest auf dieser Tafel alles gezeichnet, was Du in Worten nicht ausdrücken kannst.[41]

Alles was Ausdehnung besitzt, kann der Abakus fassen. Ohne Zweifel übertreffe Geometria dabei Apelles und Polyklet, schreibt Martian.[42] Denn Geometria bilde die Welt so wahrheitsgetreu ab, dass man fast meinen könne, sie konstruiere alles, was der Fall sei.[43] Diese göttlichen Kräfte verleiht ihr der Abakus. Schon hier wird deutlich, dass Martian den Abakus als Gegenstück zur Schrift verstanden wissen will: Überall dort, wo die Sprache versagt, hilft eine Tafel.
Wie sieht die Tafel aus? Was kann sie fassen? Bei Martian findet sich auf der Staubtafel alles, was Ausdehnung besitzt. Die Tafel ist vor allem eine Fläche. Als Fläche ist sie das Medium der Geometrie, nicht der Arithmetik. Martian nennt sie *tabula geometricalis*. Und Martian hat einen Grund. Als Staubtafel taugt der Abakus nicht zur Rechentafel. Mit jedem Zug der Rechensteine, überschriebe man die Kolumnen des Abakus. Am Ende wäre das Ergebnis zwar gesetzt – doch die Kolumnen des Rechenbretts mit dem Ergebnis ausgelöscht. Auf der Staubtafel schreibt sich alles ein: selbst das Löschen. Gegen die Verwendung einer Sandtafel spricht auch der technische Aufwand. Der Sand muss vorbereitet werden. Er muss angefeuchtet, geglättet und getrocknet werden. Während eine Rechnung mit wenigen Strichen und Kieselsteinen ausgelegt werden kann,[44] erscheint die Vorbereitung des Sandes doch vergleichsweise umständlich.

Nicht zum ersten Mal ermöglicht also die Fläche der Staubtafel, Zahlen geometrisch zu verwenden. So wird zum erneuten Male der Weg für die extensive Nutzung der Schreib- und Rechenflächen gebahnt. Zahlen bedeuten auf ihnen nicht nur Anzahl. Sie haben einen Ort, mit dem gerechnet werden kann. Die Staubtafel Martians ist nur das narrative Ende eines Wissens, das viel älter ist als seine direkten Vorgänger, die *Diciplinarum libri novem* von Varro, von denen man

I I I I I I

[40] Werner Bergmann 1985: 177-78.
[41] Martianus Capella: VI 579 [de geometria], Zweifellos erfüllt der Mantel auch eine textuelle Funktion: Er ist das visuelle Inhaltsverzeichnis zu Geometrias Rede.
[42] Martianus Capella: VI, 579 [de geometria].
[43] Martianus Capella: VI, 579 [de geometria].
[44] J. M. Pullan 1968: 18. und Werner Bergmann 1985: 179.

annimmt, dass sie Martianus als Vorbild dienten.[45] Die Rede der Geometria geht auf Plinius d. Ältere und Solinus zurück.[46] Doch die Verbindung von Astronomie, Geometrie, Sphärik und Musik, die Martianus mit der Figur Geometria verbindet, ist älter. Die Pythagoreer, so überliefert es Porphyrius in einem Kommentar zu Ptolemaios' Harmonienlehre, besitzen nicht nur eine genaue Kenntnis der gesamten Natur, sondern auch ein Wissen über ihre Teile:

> Sie haben uns deshalb genau überliefert, wie schnell sich die Sterne bewegen, wann sie aufsteigen und wann sie untergehen. Sie haben uns das Wissen über die Geometrie, die Zahlen, die Sphärik und über die Musik geschenkt; Diese scheinen Schwestern zu sein.[47]

Die Einheit des Quadriviums schreibt Porphyrius dem Pythagoreer Archytas zu. Aber die Anfänge dieses Wissen findet man in Italien im 6. Jahrhundert v. Chr. Sie verdanken ihre Herkunft dem griechischen Alphabet, ihre Existenz dem Gnomon und der Schreibtafel.

> Die Griechen schreiben Buchstaben und rechnen mit Zählsteinen [ψῆφοι], indem sie die Hand von links nach rechts führen, die Ägypter von rechts nach links,

schreibt Herodot in den *Historien*.[48] Nicht die Herkunft des Abakus, sondern nur die Bewegungsrichtung der Hand schien Herodot mit diesem Satz mitteilen zu wollen. Und dennoch bleibt diese Notiz um 425 v. Chr. bis heute der früheste literarische Fund, der auf den griechischen Gebrauch von Rechensteinen hinweist.[49] Er sagt nichts über das Alter dieser Praxis aus. Dass der Umgang mit Rechensteinen Herodot keine eigene Notiz wert ist, zeigt, dass sie schon wesentlich älter und zum Ende des 5. Jahrhunderts sehr verbreitet ist.

Die Macht eines Sandkorns

Wie die Rechensteine ausgesehen haben, bleibt im Dunkeln. Waren sie wertvoll oder konnte jeder Stein zum Rechenstein werden? Neben den griechischen Rechenbrettern haben sich die Rechensteine nicht erhalten. So kann man vermuten, dass sie nicht besonders wertvoll waren. Einen Anhaltspunkt bietet ihr Name. Bei den »ψῆφοι« handelte es sich wohl zumeist um Kieselsteine. Die zahlreichen Wortbedeutungen legen nahe, dass sie ganz unterschiedliche Funktionen besessen

III II I

[45] Vgl. Sabine Grebe 1999: 28-30f.
[46] Vgl. William Harris Stahl 1977: I 129 und Sabine Grebe 1999: 295.
[47] Archytas zit. n. Ivor Thomas: Greek Mathematics. Bd. I. S. 5.
[48] Herodot: Historien. Griechisch-deutsch. Hg. v. Josef Feix. München / Zürich 1988. II 36.
[49] Pullan 1968: 11.

haben. Sie gehen alle auf dasselbe Wort zurück. Ψῆφος bedeutet »Zählstein«, »Rechenstein«, »Spielstein«, »Stimmstein«, »Stimmtafel« und »Beschluss«.[50] Aus diesen Bedeutungen entsteht sogar ein Verb, das wörtlich »steineln« heißt: ψῆφίζω – »ich rechne«, »ich zähle«, »ich stimme ab«, »ich entscheide«, »ich beschließe«. Doch dieses Verb hat es in sich: Ins Passiv gesetzt bedeutet es »verurteilt werden«. Die ψῆφοί haben womöglich vielfältige Verwendungsweisen gehabt. Gerade weil es keine unterschiedlichen Zählsteine für Getreide oder Fischhälften, Menschen oder Felder gibt, können sie mit der gleichen Dienstfertigkeit Schafe zählen oder lautlos das Todesurteil besiegeln. Geschäfte, Götterdienst, Spiel und Unterhaltung gruppieren sich um ein einziges Ding, das wertlos ist, und dennoch zählt: den Kieselstein. Das spiegelt sich auch in der Bezeichnung wieder. Ψῆφος enthält eine große Bandbreite von Bedeutungen. Doch was hält diese Bedeutungen zusammen? Vielleicht ist der Kieselstein für die griechische Kultur eine Art Signatur. Vielleicht ist er ihr Medium. Dann bezeichnete der Kieselstein ein ganzes Bündel von Kulturtechniken, und es hat den Anschein, als folgten Zahlzeichen, Währungen und Politik derselben Logik.[51] Aber das lässt sich nicht mit Gewissheit sagen. Vermutlich ist nur ein Zufall am Werk. Es scheint, als sei der Kieselstein nicht viel mehr als eine Zähl- und Rechenhilfe, die deshalb so weit verbreitet ist, weil sie so einfach zu handhaben ist. Sie funktioniert so effizient, weil sie auf eine simple Zuordnung von Gegenstand und Zahlwert setzt. Sprachlich steht der Kieselstein mit einem weitaus kleineren Element in Verbindung. »Ψῆφος« ist mit »ψᾶφος« und »ψάμμος« verwandt:[52] Das rückt den Kieselstein in die Nähe von »Sand«, »Staub« und »Strand«. Auf der Tafel treffen Kieselstein und Staubkorn aufeinander. Wobei die Zuordnung leicht fällt. Der Kieselstein steht für die Abzählbarkeit. Er verweist auf die diskreten Techniken der Arithmetik. Das Sandkorn verweist auf den Punkt. Der Punkt steht für die kontinuierlichen Techniken der Geometrie, die sich zuweilen hartnäckig jeder Abzählbarkeit widersetzen. Wenn die Tafel zu gleichen Teilen das Medium des Kieselsteins und des Sandkorns ist, dann kann man erwarten, dass zwei ganz unterschiedliche Kulturtechniken auf ihr zusammentreffen und sich gegenseitig befeuern. Auf der Tafel lässt sich deshalb ganz gut beobachten, dass Arithmetik und

III II I

[50] Zur Wortbedeutung Gemoll 1979: 814. Zur Herdotstelle Schärlig 2001: 18. Zur dreifachen Funktion der Kieselsteine Netz 2002.
[51] Reviel Netz 2002: 340.
[52] Gemoll 1979: 812.

Geometrie sich nicht unvereinbar gegenüber stehen. Sie können vielmehr in mancher Hinsicht nicht unabhängig voneinander betrachtet werden. Was bedeutet es, wenn eine Zahl, die nach Nicomachos keine Lage hat, auf der Tafel sichtbar wird? Wie kann man etwas, was *per defintionem* unsichtbar ist, sichtbar machen? Wie kann man die Materialität der Zahl denken? Eine Geschichte des Stellenwerts müsste bei der Visualität der Zahl ansetzen und die geometrische Zahl an den Anfang setzen. Wie werden Rechenwege und Zehnerüberträge protokolliert? Wann werden mathematische Verfahren zum ersten Mal schriftlich? Wann werden sie zum ersten Mal protokolliert? Das letzte Kapitel des Buches zeigt, dass es ganz unterschiedliche Formen der Schriftlichkeit und Speicherung gibt. Die Null und die Einführung der indisch-arabischen Ziffern führt nicht per se schon Schriftlichkeit ein. Vielmehr gibt es eine verwirrende Vielfalt von Verfahren, die man als verschiedene Grade der Schriftlichkeit bezeichnen kann. Fibonacci etwa verschriftlicht im Gegensatz zu al-Hwarizmi die Zehnerüberträge nicht, damit er die Rechenwege speichern kann. Manchmal ist eben weniger mehr, das mündliche Verfahren, das auf die alten Fingerzahlen zurückgreift, in der Summe schriftlicher als jene Verfahren, die alles verschriftlichen, und dennoch die Rechenwege nicht speichern können. Doch wie steht es mit der Geometrie? Die Griechen führten Abstraktion und Visualität in die Geometrie ein. Wie verhält sich Anschauung und Abstraktion zueinander? Und welchen Status hat dabei das Diagramm? Ein erster Blick soll auf Archimedes Sandrechner fallen. Archimedes entwickelt ein Zahlsystem, das das Unabzählbare zählbar macht und unendlich erweiterbar ist. Im *Sandrechner* entwirft Archimedes zugleich ein Approximationsverfahren für die Kreiszahl π. Man kann darum genau verfolgen, wie eine arithmetische Technik, die Bündelung, auf ein geometrisches Problem angewendet wird.

Das Gesetz der großen Zahl

Im *Sandrechner* hat die Einheit immer schon Teil an der großen Zahl. Sie bestimmt, was zählbar ist. Es ist deshalb durchaus einsichtig, dass die kleinste Einheit ein Sandkorn bildet. Denn das Sandkorn wird im Fortgang von Archimedes' Überlegungen zum Rechenstein eines Zahlsystems, das beliebig erweiterbar ist. Bis 10.000 und nicht weiter reichen die griechischen Buchstabenzahlen. »Μῦριάς« ist der Name der größten Zahl. Die Erweiterung des Zahlraumes führt Archimedes an einer Aufgabe vor, die fast unlösbar scheint:

> Einige denken, König Gelon, dass die Anzahl der Sandkörner unendlich ist. Und ich denke dabei nicht nur an den Sand, der Syrakus oder ganz Sizilien bedeckt, sondern an die gesamte bewohnte und unbewohnte Erde.[53]

Der Sandrechner bezieht seinen Namen von einer Rechenaufgabe. Er will Sandkörner zählen. Diese Aufgabe legt er dem König von Sizilien vor. Er will zunächst den Sand von Syrakus, dann die Sandkörner von Sizilien und schließlich alle Sandkörner der gesamten bekannten Welt zählen. Die Erdoberfläche, so erklärt der Sandrechner, soll man sich dabei bis zu den höchsten Berggipfeln mit Sandkörnern angefüllt denken. Dreimal korrigiert sich Archimedes. Es scheint, als lege er absichtlich, diese Frage einem König vor, dessen Königreich sich an den Rändern der bekannten Welt befindet. Aber auch die Erdkugel ist dem Sandrechner nicht groß genug. Er fragt am Ende, wie viele Sandkörner man benötigt, um das gesamte Universum mit Sand zu füllen.[54] Doch allzu Ernst kann er es ihm mit dieser Frage nicht meinen. Denn Archimedes hatte keine Messung im Sinn. Seine Ausführungen zielen auf ein Verfahren, das auch auf andere Zahlsysteme übertragbar ist. Die Frage des Sandrechners ist nicht mehr als ein Gedankenexperiment. Und für dieses ist selbst das Universum zu klein. Es ist eben nur ein anschauliches Beispiel.

Archimedes denkt zuerst in der Sprache der Überbietung: Jeder Superlativ kann überboten werden. Neben der Myriade gibt es auch die Myriade der Myriade. Mit der höchsten Zahl kann auch gerechnet werden. Archimedes macht den Sonderfall zur Regel. Die Erweiterung des Zahlsystems nutzt dafür die Multiplikation. Die größte berechenbare Zahl lautet 10.000×10.000. Die obere Grenze der griechischen Buchstabenzahlen liegt also bei 10^8, auch wenn die Zahlnamen nicht vorhanden sind. So steht das Sandkorn für einen Rechenstein. Doch es verweist auf keine kaufmännische Arithmetik. Denn der Handel mit 10^8-stelligen Zahlen erzeugt Figuren, die niemals auf einem Rechenbrett gelegt werden können, geschweige denn ungekürzt notiert werden können. Dieser Handel bräuchte wiederum einen Abakus, der 10^8 Spalten besäße, die alle von der Hand eines Kaufmanns gefüllt und bedient werden müssten: Zahlenüberträge erstreckten sich über Kilometer, gingen in die Beine und verlangten selbst nach Bezahlung, die wiederum Überträge produziert und nach Bezahlung verlangt. Doch bliebe keine Zeit das schwer verdiente Geld jemals auszugeben. Die Rechnung mit Unendlichkeiten bräuchte unendlich viel Rechenzeit. Sie gebiert Ungeheuer – Zahlen, die zwar Namen besitzen, aber derart unhandlich sind, dass kein Menschenalter ausreicht,

III II I

[53] Archimedes 221.
[54] Archimedes: Sandrechner I 3.

mit ihnen umzugehen. Mit diesen arithmetischen Gewaltmärschen möchte der Sandrechner die Zeit des Königs nicht verschwenden. Er zielt aufs Ganze: auf alles, was zähl- und berechenbar ist.

Die großen Zahlen treffen auf zwei hartnäckige Zweifler. Die eine Seite glaubt, die Menge der Sandkörner sei unendlich, d. h. unzählbar, die andere, dass die Menge zwar endlich sei, aber es keine Zahl gebe, die sie benennen könne. Beide Lager glauben an kein gutes Ende. Sie haben das Scheitern schon vor Augen. Die erste Partei ist hoffnungslos pessimistisch. Ihr kann nicht geholfen werden, der anderen Partei dagegen schon. Sie glaubt ja, dass die Anzahl der Sandkörner zählbar sei. Das einzige Dilemma sieht sie darin, dass das Ergebnis der Welt nicht mitgeteilt werden kann, weil die Sprache versagt. Archimedes ignoriert die erste Partei und wendet sich der zweiten zu. Sein Lösungsweg führt ihn weniger über eine Kunst des Zählens. Denn keine Zahl ist groß genug, die Unendlichkeit zu bezeichnen. Er formalisiert darum den Zählvorgang. Als Vorbild dienen ihm die Beweistechniken der Geometrie. Das Universum steht hier nur für eine Grenze. Diese Sandkugel ist die größte, die man sich vorstellen kann. Das Sanduniversum gleicht darin der Grenze der Buchstabenzahlen. Sie steht für die Überbietung, aus der Archimedes eine Technik macht. Diese Technik ermöglicht es, dass jedes n, sei es noch so groß, auf sein $n+1$ treffen soll. Jeder Zahl soll eine weitere folgen können, die größer ist als die zuletzt genannte. Deshalb steht am Ende auch keine definitive Zahl. Der Sandrechner nennt keinen absoluten Wert. Er gibt für die Sandzahl eine obere Grenze aus.

Da das Ziel die Bezeichnung der Unendlichkeit ist, werden die Größen erst einmal maximiert. So wird der Umfang der Erde beispielsweise verzehnfacht.[55] Denn der Sandrechner sucht nicht die Anzahl der Sandkörner, sondern ein Prinzip, mit dem unendlich große Zahlen benennbar werden. Die Erde wird bei Archimedes zum Mittelpunkt der Himmelskugel. Sie wird als ein Ding gesetzt, das weder Länge noch Breite hat. Sie ist die Einheit, aus der das Universum besteht.[56] Archimedes zitiert hier Euklid, und mit ihm das axiomatische Gebäude der *Elemente*. Das Sandkorn steht dabei für das Gesetz der großen Zahl.

III II I

[55] Archimedes Sandrechner: § 1.
[56] Archimedes: Sandrechner I 6.

Die Bündelung und das »Mohnkorn«

Mit dem Sandkorn zitiert Archimedes den euklidischen Punkt und setzt mit ihm auf eine Welt der stetigen Teilung. Ein eingeschriebenes Tausendeck soll die maximale Annährung an den Umkreis der Himmelskugel ermöglichen. Archimedes folgt hier der Logik der Exhaustion, die er auch schon zur Näherungsrechnung von π herangezogen hat.[57] Doch diesmal wird die Seite des eingeschriebenen Polygons nicht auf den Schenkel eines rechtwinkligen Dreiecks abgebildet. Nicht die Planimetrie der Tafel, sondern das Universum schlechthin ist das Bezugssystem für die Sandrechnung, eine Arithmetik der kleinsten Teile. Die Seite des Tausendecks, 1/1000 des Umkreises der Himmelskugel, ist kleiner als der Durchmesser der Sonne, so lautet das Ergebnis des Beweises. Archimedes setzt nun in dieses Verhältnis die Proportionen von Aristarchos ein, um die Umkreise von Erd- und Himmelskugel zu errechnen. Die Erdkugel hat demnach einen Durchmesser von 10.000 Stadien. Die Kugel, die das ganze Universum umfasst, misst 10.000.000.000 Stadien. Dann folgt ein Sprung, der von der Weite des Universums zum Staubkorns führt – gerade so, als sei der Sandrechner wie Alice durch ein Kaninchen-loch gestürzt:

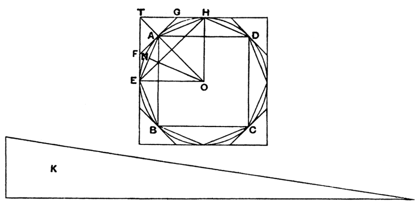


Fig. 1 – Archimedes, Über die Kreismessung (Mugler 1939).

> Wenn man einen Körper von Sand bildete, nicht größer als ein Mohnkorn, so ist die Zahl der Sandkörner darin nicht größer als 10.000; auch ist der Durchmesser eines Mohnkorns nicht kleiner als der 40. Teil einer Fingerbreite (= eines Zolls).[58]

Die gesamte Erstreckung der Buchstabenzahlen (von 1 bis 9.999) passt in ein Mohnkorn. Das Mohnkorn wiederum stellt die Verbindung zum Sandkorn her, die Fingerbreite zum Umfang der Sandkugel. Mohnkorn und Fingerbreite erleichtern die Umrechnung in Stadien. Sie funktionieren beide nach dem Modell *Babuschka*. Schon hier wird die Lösung sichtbar: Zahlen werden durch Bündelung klein gehalten. Die Zahl der Sandkörner mag so groß sein wie sie will, sie kann nur gezählt werden, wenn das Zahlsystem erweiterbar ist. Die Grundlage der Erweiterung bilden die Buchstabenzahlen:

III II I

[57] Archimedes Messung des Kreises: Prop. 1.

[58] Archimedes: Sandrechner § 7.

Nun haben wir die Namen der Zahlen bis 10000 durch Überlieferung, und kennen auch die über 10000 hinlänglich, indem wir die Myriaden bis zu 10000 Myriaden zählen [$10^8 * 10^8$]. Die eben genannten Zahlen nun bis zu 10.000 Myriaden mögen **Zahlen der ersten Ordnung** heißen. Von diesen Zahlen der ersten Ordnung mögen 10.000 Myriaden die **Einheit der zweiten Ordnung** heißen, und man zähle von diesen Zahlen der zweiten Ordnung die Einer, Zehner, Hunderter, Tausender und Myriaden bis 10.000 Myriaden....[59]

Diese Erweiterung des Zahlraums auf der Ebene der Buchstabenzahlen geht bis zur 9.999. Ordnung. Die Einheit sind Myriaden, so dass man die Zahlen wie in folgender Graphik angedeutet, bilden kann:

1. Ordnung

1 bis 10^8

→

2. Ordnung

10^8 bis 10^{16}

→

***n*. Ordnung**

$10^{n(10^n-1)}$ bis 10^{n*10^n}

→

10^8. Ordnung

$10^{8*(10^8-1)}$ bis 10^{8*10^8}

→ 1. Periode

Die 10^8. Ordnung wird durch eine neue Einheit ersetzt. Das dezimale Zahlsystem ordnet die Buchstabenzahlen in »Oktaden« an.[60] Die »Oktade« ergibt sich aus Grenzen des Zahlsystems. Es ist die Myriade der Myriade. Archimedes zählt demnach nicht jedes einzelne Sandkorn, sondern die Grenzübertritte. Er zählt, wie häufig, die Grenzen des Zahlsystems überschritten werden müssen, damit die Sandzahl des Universums benannt werden. Die archimedische Oktade dient der Bündelung. Danach erfolgt ein Übertrag. Myriaden Ordnungen bilden eine Periode *p*:

$$10^{8*10^8} = p.$$

Eine Periode kann wiederum durch Myriaden Ordnungen erweitert werden, die man erneut mit Oktaden bündeln kann. Auch in diesem Fall werden nicht die Sandkörner, sondern die Bündelungen, d. h. die Ordnungen, gezählt:

I I I   I I   I

[59] Archimedes: Sandrechner § 8.
[60] Für die Oktade s. Archimedes: Sandrechner § 9.

2. Periode /			
1. Ordnung	**2. Periode /**		
$1p$ bis $10^8 p$	**2. Ordnung**	***n*. Periode /**	
→	$10^8 p$ bis $10^{16} p$	***n*. Ordnung**	**10⁸. Periode /**
	→	$10^{n(10^n-1)} p$ bis $10^{n*10^n} p$	**10⁸. Ordnung**
		→	$10^{8(10^8-1)} p$ bis $10^{8*10^8} p$
			→ ∞

Der kleinste Abakus und das Gesetz der Reihe

Nachdem Archimedes mit der zweiten Erweiterung des Zahlsystems die Ordnungen gezählt hat, kann er auf diese Weise endlos fortzufahren. Er kann die die Perioden der Perioden zählen, und auch danach ist kein Ende in Sicht. Über die Generationen der Zahlen, die die Bündelung ermöglicht, schreibt er nur ganz lapidar: »Es leuchtet ein, dass... noch viele Oktaden folgen« (§ 9.). Denn die Sandrechnung stellt eine geometrische Reihe her, die beliebig erweiterbar ist. Archimedes setzt auch hier auf die Werkzeuge der deduktiven Geometrie. Er schlägt sich nicht weiter mit den Einzelgliedern herum, sondern formuliert das Gesetz der Reihe. In diesem Sinne schließt er die geometrische Reihe mit einer Bedingung:

> Wenn... Zahlen von der Einheit in Progression stehen, und einige von ihnen mit einander multiplicirt werden, so gehört das Produkt in dieselbe Progression, und steht von dem grössern Faktor so weit ab, als der kleinere von der Einheit nach dem Gesetze der Progression entfernt ist. Von der Einheit aber steht das Produkt von Eins weniger ab, als die Summe der beiden Zahlen beträgt, um welche die Faktoren von der Einheit abstehen.[61]

Gibt es also zwei Zahlen, a_m und a_n, die aufeinander folgen und Glieder einer geometrischen Reihe sind, so gilt:

$$a_m \cdot a_n = a_{m+n-1}$$

Der Sandrechner führt diese Bedingung sogleich an der Alphabetreihe selbst aus.

> Es mögen nämlich folgende Zahlen von der Einheit a_n in Progression stehen:
> $\mathrm{A} : \mathrm{B} : \Gamma : \Delta : \mathrm{E} : \mathrm{Z} : \mathrm{H} : \Theta : \mathrm{I} : \mathrm{K} : \Lambda$,
> A selbst sei die Einheit und es werde Δ mit Θ multiplicirt; das Produkt sei K. Man nehme nun aus jener Progression das Glied Λ, welches von Θ so weit absteht, wie Δ von der Einheit [α], so ist zu zeigen, dass $\mathrm{K} = \Lambda$. Da nun in der Progression Δ von α gerade so weit absteht, wie Λ von Θ, so verhält sich

III II I

[61] Archimedes Sandrechner: § 10.

$\Delta : \mathrm{A} = \Lambda : \Theta$

Es ist aber Δ das Δ-fache von A, mithin ist auch Λ das Δ-fache von Θ, also ist $\mathrm{K} = \Lambda$.[62]

Zwar nutzt dieser Beweis die Ordinalität des Alphabets, um die Lösung zu formalisieren. Aber die Antwort, die er auf die Frage von König Gelon findet, ist dennoch endlich. Für die Himmelskugel genügen dem Sandrechner Zahlen bis zur 10^8. Ordnung genügen. Er setzt auf das Mohnkorn. Das Mohnkorn nutzt das Alphabet, das gründet auf dem Übertrag gründet. Immer wenn sich 10.000 Einheiten angesammelt haben, werden sie durch eine neue Einheit, einen neuen Buchstaben, ersetzt. Das Mohnkorn erweitert die Buchstabenzahlen. Denn sie besitzen einen Makel. Sie setzen nicht auf Wiederholung und besitzen darum auch keine Dezimalcodierung. Dass etwa eine Verwandtschaft zwischen 2, 20 und 200 besteht, kann man den Buchstabenzahlen β, κ und σ nicht ansehen. Die Buchstabenzahlen schreiten stur die Alphabetreihe ab. Erst Archimedes versieht sie durch die Bündelung mit einer Zehnercodierung, die das Zählen und Rechnen ungemein erleichtert. Dezimal aufgerüstet, setzt sie Archimedes auf dem Rechenbrett ein, das bis dahin nur mit akrophonischen Zahlzeichen beschriftet worden ist. Dabei greift er auf einen einen vertrauten Vorgang auf dem Rechenbrett zurück, um Zahlen zu bündeln. Wenn 10 bzw. 5 Steine durch einen einzigen ersetzt werden, sagt man, das Rechenbrett werde bereinigt. Das Mohnkorn tut bei Archimedes nichts anderes: Indem es 10.000 Einheiten ersetzt, hält es den Zählvorgang überschaubar. Mit dem Mohnkorn funktionieren die Buchstabenzahlen deshalb auf dem Sandbrett wie ein Abakus.

IBM hat mit C_{60}-Molekülen auf einer Kupferplatte den kleinsten Abakus gebaut.[63] Archimedes hat dagegen die Ausdehnung des Sandkorns an der Dimensionslosigkeit des euklidischen Punktes orientiert und so schon im 2. Jahrhundert v. Chr. einen Abakus im Gedanken bis ins Unendliche verkleinert. Mit einem Abakus, der mit Sandkörnern zählt und rechnet, hat er das Gesetz der großen Zahl aufgestellt. Die Nanophysiker des *Zurich Research-Laboratory* zählen mit den »bucky balls«, die kleiner sind als ein Nanometer, nur mühsam von 1 bis 10. Archimedes zählt dagegen weniger die Sandkörner als die Bündelungen und hat mit diesem Trick schon immer gewonnen. Doch im Gegensatz zum Rechenbrett setzt Archimedes nicht auf Tafeln und Tabellen. Er setzt auf Kugelvolumina, auf

III II I

[62] Archimedes: Sandrechner § 10.

[63] Maria T. Cuberes, Reto R. Schlitter & James K. Gimzewski 1996: 3016. Diesen Hinweis verdanke ich Jochen Hennig vom *Helmholtz-Zentrums für Kulturtechnik*.

die physische Geometrie des Rechensteins. Weil die Aufgabe aus dem Grenzbereich von Sphärik und Arithmetik kommt, ist dies die optimale Lösung. Sie ermöglicht es, die Anzahl der Sandkörner auf den Umfang der Sphären hochzurechnen. Die Anzahl der Überträge macht die Sandkörner zählbar. Die Erdkugel enthält nicht weniger als 10^{45} Sandkörner, die Himmelskugel 10^{54} und der Umfang der Fixsternsphäre 10^{63} Sandkörner.[64]

Archimedes ist den Logarithmen schon sehr nahe gekommen,[65] aber sein *Sandrechner* verlässt dennoch die Ordnung des Rechenbretts nicht. Archimedes rechnet noch immer mit Sandkörnern und liest die Einheiten von den Spalten des Abakus ab. So lautet das Ergebnis für die Erdkugel:

> Von diesen 46 Gliedern gehören die 8 ersten mit Inbegriff der Einheit zu den Zahlen der ersten Ordnung, die darauf folgenden 8 zur zweiten, die nächsten 8 zur dritten, die folgenden 8 zur vierten, die hiernächst folgenden zur fünften und die übrigen zur sechsten Ordnung und das letzte von ihnen beträgt 10 Myriaden der sechsten Ordnung...[66]

Nun muss er nur noch das Ergebnis aus den Kolumnen seines Sandabakus ablesen. Er sieht,

> ..., dass die Menge Sandes von der Größe einer Kugel von 1000*1000 Stadien im Durchmesser kleiner ist als 10 Myriaden der 6. Ordnung.[67]

Archimedes verfährt auf diese Weise mit allen Ergebnissen. Dabei stehen seine Lösungen nicht für reale Zählvorgänge, sie veranschaulichen nur ein abstraktes Verfahren. Jedes *n* ist auf Erweiterbarkeit angelegt. Aber während IBM nur mit Molekülen rechnet, verwendet der Sandrechner einen Abakus, der kleiner ist als ein Molekül. Dafür sorgt die Axiomatik des Sandkorns, die sich des Mohnsamens bedient, um mit der Technik der Exhaustion mit dem kleinsten Element nicht nur die Umlaufbahn der Sterne zu errechnen, sondern mit dem kleinsten Element die Unendlichkeit zu berechnen. Dabei sind die irrationalen Zahlen nur die andere Seite des Universums. Denn Archimedes bündelt die Berechnung der größten Sandkugel mit der Kreismessung. Ihre Sandzahl kann also auf das Problem π heruntergerechnet werden.

Vorerst kann genügen, dass die Sandtafel bei Archimedes zugleich Rechenfläche und Anzahl ist.[68] Auch der Kieselstein, der auf der Agora die kleinen Zahlen misst, ist nur ein Übertrag auf dem langen Weg, den die Zahlen im 2. Jahrhundert v.

III II I

[64] Archimedes: Sandrechner IV 12-18.

[65] Vgl. Maurice d'Ocagne kleine Geschichte des Logarithmus' im Anhang III 1928/1968: 155.

[66] Archimedes: Sandrechner: § 17.

[67] Archimedes Sandrechner: § 17.

[68] Vgl. Maarten Bullynck 2003 und seine laufenden Arbeiten zur »Plättung« von Operator und Operand.

Chr. vom Universum zum Staubkorn, vom Rechenstein zum euklidischen Punkt, zurücklegt haben. Der Kieselstein ist weit davon entfernt, ein Medium zu sein. Seine Operativität kann nicht ohne die Tafel gedacht werden.

DIE SCHRIFT DER TAFELN

Beschriebene Tafeln

Aus Sandkorn und Mohnkorn baut Archimedes ein Zahlsystem. Der Staub der Tafel wird selbst zur Einheit eines Rechenbretts, das beliebig große Zahlen benennen und berechnen kann. Die Oberfläche des Abakus entsteht dabei aus dem Sandkorn. Zwar spricht Herodot nur von Rechensteinen. Aber Archimedes führt es mit dem *Sandrechner* lebhaft vor, wie man aus den Operationen der Steine das Format der Tafel erschließen kann. Was sagen also die Tafeln? Wo findet man sie? Der Redner Lysias ist der erste Grieche, der eine Rechentafel erwähnt.[69] Die Rechentafel (*abakion*) ist also schon im 5. Jahrhundert v. Chr. bekannt. Aber wie wird die Tafel verwendet? Ist sie wirklich nur ein bloßes Werkzeug der Ökonomie? Die bekannteste und am häufigsten beschriebene griechische Rechentafel ist eine marmorne Tafel, die 1845 auf der Insel Salamis gefunden worden ist.[70] Mit der Datierung tut sich die Forschung schwer: Man schätzt, dass sie um 500 entstanden ist. Sie enthält drei akrophonische Zahlenreihen. Aber ihr Zweck bleibt dunkel. Vielleicht wurden sie zur Geldumrechnung verwendet. Aber ebenso gut kann man annehmen, daß sie niemals zum Tausch von Geld und Waren verwendet worden ist. Womöglich wurde sie nur im Schulunterricht verwendet.[71] Doch vielleicht wurde auf ihr noch nicht einmal gerechnet, vielleicht hat man die Steine nur zum Spielen bewegt. Denn Spiel und Rechenbrett gleichen einander. Auf manchen Spielbrettern kann man auch eine Rechnung auslegen, auf Rechenbrettern auch Spielen.[72]
Einer der ältesten Abaci mit Zahlenreihe wurde 1976 in Korinth entdeckt. Seine Datierung ist jedoch sehr vage. Nur ein Bruchstück hat sich von diesem Abakus

III II I

[69] Vgl. Julius Pollux: Onomasticon X, 106.
[70] Diese Tafel ist im Epigraphischen Museum in Athen ausgestellt. Ihre Signatur lautet IG II^2 2777. Über die Operationen der Salaminischen Rechentafel s. Alfred Nagl 1918. Karl Menninger: 1957: II 104-109.
[71] Eine Zusammenfassung dieser Hypothesen mit Quellenangaben findet sich bei Alain Schärlig 2001: 66-67.
[72] SEG XXVI 401 oder SEG XXXVI 310.

erhalten: Es ist ein Stück aus weißem, kristallinem Marmor. Die Korinthische Tafel enthält eine akrophonische Zahlenreihe:

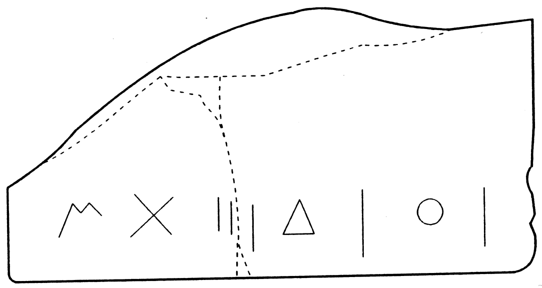


Fig. 2 – Tafelrest aus Korinth (frühes 5. Jahrhundert)

Die Tafel ist spätestens im 5. Jahrhundert entstanden.[73] Am Rand der Tafel befindet sich eine Inschrift: ΣTATA[...]. Die Tafel mag im Besitz eines Feldherrns gewesen sein. Vielleicht zählte sie den Sold unzähliger Soldaten, die Stadien ihres Vormarsches.[74] Man weiß es nicht. Ist die Inschrift genauso alt wie die Tafel? Nichts ist sicher.

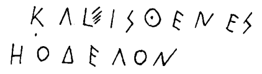
Die ältesten Tafeln geben über ihre Verwendung nicht viel preis. Auf einem Pflasterstein des Staatsmarkts von Ephesos ist das Spielfeld des *Ludus duodecim scriptorum* eingeritzt. Sein Liniengerüst lässt sich ebenso gut als Abakus nutzen. Doch das Spiel ist älter: Auch auf den Linien der Salaminischen Tafel kann der *Ludus duodecim scriptorum* oder e *grammai* gespielt werden.[75] Die Linien der Steintafeln verknüpfen so die Ökonomie immer schon mit dem Spiel und das Spiel mit der Mathematik. Wenn Zählen, Zeigen und Spielen auf ein und derselben Tafel stattfinden, sind Überträge und mit ihnen neue Verwendungsweisen wahrscheinlich. Das macht den Abakus zum Schauplatz von Zäsuren und kulturtechnischen Innovationen.

III II I

[73] Alain Schärlig 2001: 85.
[74] Immerwahr 1986: 202.
[75] Vgl. Waschkies 1989: 235.

Eine unbeschriebene Tafel und eine Kritzelei

Noch stummer als ihre numerischen Verwandten sind die Steintafeln, deren Linien keine Beschriftung aufweisen. Nur Linien lassen erahnen, dass sie auch als Abakus gedient haben könnten. Von den elf Tafeln, die gefunden worden sind, können nur wenige datiert werden.[76] Eine Tafel ragt heraus. Ein gut erhaltenes Graffito verweist auf eine der ältesten Tafeln und auch auf ihren Verwendungszweck als Abakus. Sie ist 1975 von deutschen Archäologen auf der Insel Aegina [Aíyina] in der Nähe des Heiligtums der Nymphe Aphaia gefunden worden.[77] Es ist eine Kalktafel mit 11 Linien. Und schon die Anzahl der Linien lässt vermuten, dass diese Tafel Spiel- und Rechenbrett zugleich ist. Die Datierung der Tafel erfolgt über eine flüchtige Inschrift. Von sieben Zeilen enthalten nur die letzten zwei Zeilen vollständige Wörter:[78]



Aber weder der Verweis auf Kleisthenes, noch auf »diese Tafel« helfen weiter. Womöglich besiegeln diese Zeilen einen Vertrag. Die Lücken sind zu zahlreich: Nicht die Wörter, nur die Buchstabenformen sind sprechend. Aus ihnen schließt Immerwahr, dass die Tafel spätestens zwischen 510 und 500 v. Chr. entstanden sein muss.[79] Aber selbst diese Jahreszahlen markieren nur eine obere Grenze. Die Tafel kann ebenso gut älter sein. Denn die Linien verraten ihr Alter nicht. So lässt sich auch nicht feststellen, ob die Griechen zuerst die beschrifteten oder unbeschrifteten Tafeln verwendet haben. Für jede Antwort gibt es gute Argumente.

Was bleibt also? Die Archäologie der Tafeln bringt nicht viel Licht. Von den 31 Tafeln, die bisher gefunden worden sind, kann man nur wenige sicher datieren. Und selbst wenn es Anhaltpunkte gibt, sind die Datierungen häufig sehr ungenau.[80] Einige Tafeln scheinen zum Ende des 6. Jahrhunderts schon zu existieren. Für die Griechen bleibt dies entscheidend, denn das Alter der akrophonischen Zahlen ist

III II I

[76] Für die Zusammenstellung s. Alain Schärlig 2001: 71-81.
[77] SEG XXXVI 305.
[78] Immerwahr 1986: 197, Fig. 3a.
[79] Immerwahr 1986: 195 f. Es ist genau die Zeit, in der der Nymphentempel niederbrennt (510 v. Chr.) und an derselben Stelle ein neuer Tempel entsteht (500 v. Chr.). Dazu findet sich allerdings bei Immerwahr nichts.
[80] Vgl. Alain Schärlig 2001: 65-102.

epigraphisch nicht wesentlich früher nachweisbar. Die Mehrzahl der Tafeln stammt aus dem 5. Jahrhundert. Der Verwendungszweck der Tafeln ist dagegen wenig eindeutig. Wie sie verwendet wurden, bleibt unklar. Doch nichts spricht dagegen, dass dieselben Tafeln dem Schulunterricht, dem Handel und der Unterhaltung gedient haben können. Die Tafeln bleiben stumm. Und die Kieselsteine? Von ihnen kann man nicht ernsthaft erwarten, dass sie etwas über die ersten Rechensteine aussagen. So bleibt nur noch die Spur der Steine – das, was sie auf Papyrus, Ton und Stein hinterlassen haben.

DIE SPUR DER STEINE

Auf den Rechenflächen lässt sich der Gebrauch der Steine weiter zurückverfolgen. Aber auch hier bleibt eine Schwierigkeit. Da Rechensteine auf jeder flachen Oberfläche operieren können, lassen sie sich nur in wenigen Fällen archäologisch nachweisen.[81] Weil jeder Grund temporär zum Abakus werden kann, der Gebrauch des Abakus aber so selbstverständlich ist, dass wenig über ihn niedergelegt ist, beschränkt sich die Datierung auf Indizien. Deshalb möchte ich die Aufmerksamkeit zunächst weniger auf die Fläche richten. Sie droht im Sand zu verschwinden. Im folgenden will ich vielmehr die Operationen der Steine untersuchen. Das Kapitel folgt zwei Spuren, ehe es auf die Griechen stößt, auf ihren Umgang mit den figurierten Zahlen und den Übertrag auf die Beweisverfahren der deduktiven Geometrie: den Zählsteinen der Sumerer und den Punktdiagrammen der Ägypter.

Schrift oder Zahl

Die erste Spur führt zu kleinen geometrischen Objekten aus Ton und sind zahlreich. Sie liegen in der Nähe von Tempeln und Palästen. Sie füllen Gräbern, bevölkern Siedlungen, liegen in Flussbetten. Bis in die Mitte des 20. Jahrhunderts haben sie die Archäologie als »sonderbare kleine Gegenstände« gefoppt. Sie werden mal als Murmeln, mal als Spielsteine interpretiert. Erst eine groß angelegte Studie von Denise Schmandt-Besserat hat sie als Zählsteine bezeichnet, die auf eine einfache Form der Buchhaltung verweisen.[82] Zählsteine dieser Art gibt es vom frühesten 8. Jahrtausend bis 1500 v.Chr. Sie variieren in ihrer Form nur wenig.[83] Die frühesten Vertreter haben einfache geometrische Formen: Es sind Zylinder, Kegel, Kuben, Kugeln, Pyramiden und Scheiben. Sie tauchen an fünf Orten in Syrien und Iran auf.[84] Gelagert in Tonumschlägen oder an Bullen

[81] Pullan 1968: 93.
[82] Die »sonderbaren kleinen Gegenstände aus Ton« von Julius Jordan sind nach Schmandt-Besserat 1992: 148 zitiert. Eine elliptische Geschichte der Lesarten findet sich bei Stephen Lieberman 1980: 339-40, eine etwas ausführlichere bei Schmandt-Besserat 1992: 6-10.
[83] Denise Schmandt-Besserat 1992: 139.
[84] Vgl. für Syrien – für Tell Mureybet, Scheikh Hassan und Tell Aswad -- Denise Schmandt-Besserat 1992: 136 und für Iran -- für Ganj Dareh und Tepe Asiab -- dies.: 1992 140-41.

befestigt, werden sie für Jäger und Bauern zum ersten Buchhaltungssystem. Jeden Tonumschlag mussten sie zunächst zerschlagen, um die Zählsteine zu verwenden. Jede Buchhaltung hält also nur einer Prüfung stand. Darum verweisen in Susa und Uruk bald Abdrücke der Zählsteine auf der Außenseite der Bullen auf die Anzahl der Zählsteine.[85] Je mehr sich die Außenseite der Umschläge als Speichermedium bewährt, je verlässlicher die Informationen auf ihnen werden, desto redundanter wird der Inhalt. Abdrücke, die ehemals Stellvertreter der Zählsteine waren, drohen die Steine im Innern nun zu ersetzen. Zwischen 3500-3100 v. Chr. Werden aus den Bullen Tafeln. Sie werden der Tiefe beraubt auf eine Fläche reduziert.[86] Das ist der Beginn der Schreibfläche. In den Buchhaltungstechniken der Tempelverwaltung und der Palastverwaltung in Uruk und Susa findet man die Anfänge der Schrift. Buchhaltung findet zunehmend nur noch auf Tafeln statt. Das ist die Lesart von Schmandt-Besserat. Am Anfang der Schrift stehen Zahlen, die nicht mehr auf die Korrespondenz mit realen Dingen angewiesen sind. Das Zeichen hat sich vom Bezeichneten gelöst. Es braucht keine Zeugen mehr.

Was verraten die Tafeln? Liegt der Anfang der Schrift in der Zahl? Die Grabungsfunde aus Uruk sprechen eine andere Sprache. Sie zeigen, dass Zahlen nicht nahtlos in Schrift übergehen.[87] Die frühen Aufzeichnungen unterscheiden zwischen zwei Datenformaten: zwischen Schrift und Zahl. Bevor die Keilschrift die Schreibtechnik vereinheitlicht und beschleunigt,[88] bilden sich in den frühen Listen und Registern zwei Stile aus, die beide Formate sichtbar voneinander trennen. Neben geritzten Zeichen, krummlinigen und geraden, finden sich Abdrücke, Kreise, Ellipsen und Kerben. Auf den frühen Tafeln aus der Grabungsschrift IVa wird Schrift geritzt, Zahlen hingegen werden durch Abdruck erzeugt. Während die Formen der Zahlen daraufhin sehr begrenzt sind, bringen es die geritzten Zeichen in Uruk auf knapp 780 Einträge.[89] Unter den aufgeführten Zeichen kombinieren knapp 40 Zeichen die Ritz- und Abdrucktechnik. Zuweilen sind sie auch mit einem Zahlzeichen identisch. So ist etwa das Zeichen für Fisch, , dem Anzahlzeichen für 2 entlehnt.[90] Doch das lässt eher darauf schließen, dass dieses Zeichen in Listen die Anzahl des Fisches bündelt und zählt.

III II I

[85] Denise Schmandt-Besserat 1992: I 125.
[86] Denise Schmandt-Besserat 1992: I 133.
[87]. Hans J. Nissen 1987: 58-60.
[88] Zur Keilschrift als Eilschrift vgl. Hans J. Nissen 1987: 60.
[89] Zu den Hauptzeichenformen vgl. Hans J. Nissen 1987 – 372-374.
[90] Peter Damerow / Robert Englund 1987: 166.

Offensichtlich wurden dabei Fischhälften gezählt. Ob nun halbe Portionen oder ganze Fische gezählt werden – die Zählung bestätigt selbst hier die Unterscheidung:[91] Schrift wird geritzt, Zahlen werden durch Abdrücke hergestellt.

Die Unterscheidung zwischen diesen beiden Schreibtechniken geschieht über die zwei Enden des Schilfrohrs.[92] Auf der einen Seite befindet sich ein stumpfes Ende. Das andere Ende trägt eine abgeschrägte Spitze. Die stumpfe Seite produziert Zahlen. Sie imitiert die Kuppe des Daumens, der noch in Susa die Zahlen in das Nass der Tafel drückte. Die Palastbeamten von Uruk wollen sich nur noch selten den Daumen schmutzig machen. Sie benutzen eine effizientere und schnellere Schreibweise. Mit senkrechter Griffelhaltung erzeugen sie Kreise: ●. Geht ihr Griffel in die Schräglage, entstehen angeschnittene Ellipsen: ▷ [vgl. Fig. 2]. Das Zahlsystem hat eine sexagesimale Ordnung. Der Sprung erfolgt bei 60, weitere Überträge bei einem Vielfachen von 60. Im nachfolgenden Beispiel wird bei 60 auch der Griffel gewendet:

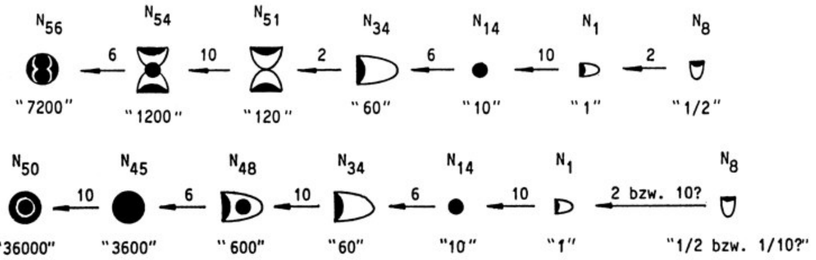


Fig. 3 – Zwei Varianten eines sexagesimalen Zahlsystems in Uruk: »Zahlsystem B« (oben) und »Zahlsystem S« mit dyadischen Bündelungen (unten)

Und während also das stumpfe Griffelende Zahlen in den Ton druckt, erzeugt das spitze Ende mit ihnen Schrift. Das römische *stilum vertere* findet seinen Vorgänger in der Schreibpraxis der Babyloniern. Aber bei den Bablyoniern stehen nicht löschen und schreiben in Opposition, sondern schreiben und zählen. Die alternierende Anordnung der Datenformate ist so wichtig, dass selbst ein Name dem *stilum vertere* auf akkadisch reserviert ist: *ge-gur-a*, »[Schilf]rohr gewendet«.[93] Den Enden des Schilfrohrs entspringen also zwei Datenformate: Schrift und Zahl. Sie sind deutlich voneinander getrennt.

I I I I I I

[91] Hans J. Nissen 1987: 308, Nr. 606

[92] Peter Damerow / Robert Englund 1987: 117.

[93] Stephen Lieberman 1980: 345. Ihm folgt Hans-Joachim Waschkies 1989: 116 mit ausführlicheren Schlussfolgerungen.

Was bedeutet das für Schmandt-Besserats These, dass die Schrift aus der Zahl entsteht? Nicht nur die zwei Enden des Schilfrohrs stehen einem allzu evolutionär gedachten Übertrag vom Rechenstein zum Schriftzeichen entgegen. Man kann auch an dem Abstraktionsvermögen der ersten Zahlen zweifeln. Sie funktionieren immer noch als Anzahl. Additive Zahlsysteme, auch wenn sie sich Zeichen für Bündelung bedienen, brauchen kein Konzept der Einheit, Zweiheit oder Vielheit.[94] Man muss nur die Zahlzeichen den Objekten zuordnen – Indexikalität und Anwesenheit ersetzen die Notwendigkeit, zu abstrahieren. Das Objekt kann wiederum ein Zahlzeichen sein, das durch Bündelung ersetzt werden soll. Aber eine zweite Frage scheint deswegen entscheidender. Noch einmal kommt das stumpfe Ende des Schreibrohrs in den Blick. Man kann den Kreis als Abdruck des Kegels lesen, die Halbellipsen als Abdruck des Zylinders deuten: die Zahlzeichen also vollständig aus den Abdrücken der häufigsten Zählsteine abeiten. Trotzdem bleiben Zweifel: Führt der Weg vom Zählstein zur Schrift ausschließlich über den Abdruck? Die Tafeln sind mobil. Sie sind mit 4×5 Zentimetern kleiner als ein Palmtop. Aber dennoch ist ihr Nutzen beschränkt: Die einmal notierten Zeichen kann man nicht löschen. Sie sind reine Lesemedien. Sind sie einmal gebrannt oder getrocknet, lassen sie jede Operationalität auf der Schreibfläche vermissen. Findet die zweidimensionale Tafel tatsächlich nur als Speichermedium Verwendung? Zweifel sind angebracht. Denn Verwaltung und Buchhaltung sind mit reinen Lesemedien nur schwer vorstellbar. Stephen Lieberman verweist auf das Personal der altbabylonischen Lú-Listen:[95] Sie enthalten Berufsbezeichnungen aus dem ersten Drittel des 2. Jahrtausend. In ihnen findet Lieberman einen »Mann mit einem Registrierbrett« (lú ^{geš}dab$_4$-dím),[96] einen »Mann mit einem Abakus« (lú šumun-gi), einen »Mann mit den Tonsteinen« (lú im-$^{na}{}_4$na) und einen »Mann mit Steingewichten aus Ton« (lú $^{na}{}_4$na).[97] Gleich hinter diesen Bezeichnungen werden Berufe aus dem Umfeld der Schule aufgeführt. So z.B. der *lú lahtan*. Das ist ein Mann mit einer Bierkiste. Das Bier entspricht der Schulmilch.[98] So lässt sich vermuten, dass der Umgang mit dem Abakus schon zu Beginn des 2. Jahrtausends so fest veran-

III II I

[94] Vgl. den systematischen Einwand von Otto Neugebauer 1934: 184 f.

[95] Zit n. Stephen Lieberman 1980: 346. Für die Datierung s. 1980: 350.

[96] Dies heisst wörtlich »holzformende Tafel«, oder »tafelförmiges Holz«. Vgl. Stephen Lieberman 1980: 348.

[97] Stephen Lieberman 1980: 349.

[98] Ebd.

kert ist, dass er in der Schule unterrichtet wird.[99] Die Zählsteine sind also zugleich auch Rechensteine, die nicht nur Vieh- und Kornbestände speichern. Dafür spricht, dass niemals Tafeln mit Zwischenergebnissen gefunden worden sind. Die Lösungen der Aufgaben scheinen den Schreibern und Schülern so leicht von der Hand zu gehen, dass sie ganz ohne Schmierzettel gelöst worden sind. Bei umfangreichen Rechnungen findet sich stattdessen häufig die Aufforderung: »Lege es hin«. Dieser Zusatz lässt vermuten, dass Zählsteine in irgendeiner Form gebräuchlich sind.[100] Die Zählsteine legen eine Art von Abakus nahe, der die Zwischenergebnisse bündelt, errechnet und merkt.[101] Über die Gestalt des Abakus' lässt sich nur spekulieren. Das Rechenbrett scheint aus Holz zu sein. Denn »geš« heißt Holz. Vielleicht rechnen die Babylonier mit einem Holzbrett. Es enthält vermutlich Vertiefungen, mit denen man Einheiten bündeln und somit schneller zählen kann. Ein solches Zählbrett ist vom athenischen Gericht überlifert. Es zählt auf ihm die Wahlkugeln der Dikasten, um über die Schuld des Angeklagten zu entscheiden und das Strafmaß festzusetzen.

> Nachdem alle ihre Stimme abgegeben haben,

schreibt Aristoteles,

> nehmen die Diener die gültige Amphore und schütten (die Wahlkugeln) auf ein Rechnungsbord, das so viele Bohrungen hat, wie Wahlkugeln vorhanden sind, wobei diese (die Bohrungen) so angelegt sind, dass die ausliegenden gültigen (Wahlkugeln) leicht zu zählen sind...[102]

Die Zahlen sind aus dem Abdruck der Rechensteine entstanden. Ihre additive Ordnung folgt nicht der Tontafel, sondern der Ordnung des Zählbretts. Der Abakus lässt keinen Zweifel, dass die Tonsteine nicht nur ungeordnet in den Tonumschlägen lagen, sondern einem Stellenwertsystem folgen. Man findet aber nicht nur Bündelungen, sondern auch eine Unterscheidung, die für die figurierten Zahlen wichtig wird: die Unterscheidung zwischen gerade und ungerade. Die Einheiten gerader Zahlen sind als Rechteck angeordnet, die Einheiten ungerader Zahlen als Winkelhaken. Die Babylonier können den Winkelhaken aber noch nicht aus der Arithmetik in die Geometrie übertragen, weil sie nicht zwischen stumpfen, rechten und spitzen Winkeln unterscheiden. Selbst der Begriff des Winkels ist ihnen fremd.[103] Der rechte Winkel macht erst mit Thales Karriere. Doch solange die Babylonier von der Geometrie, dem Stellenwertsystem ihrer

[99] Vgl. Stephen Lieberman 349.
[100] Hans Joachim Waschkies 1989: 86.
[101] Hans-Joachim Waschkies 1989: 193 f.
[102] Aristoteles Staat der Athener: 69.
[103] Vgl. Arpad Szabo 1982: 189-190.

Tafel auf die Arithmetik blicken, bleibt diese Unterscheidung redundant. Dennoch, so schließt Waschkies, seien zahlentheoretische Einsichten nicht ausgeschlossen.[104] Doch eindeutige Argumente liefert er für diese Behauptung nicht. Die Kopplung von Zahlsystem und Zählstein legt lediglich nahe, dass »der Mann mit den Steinen« im weitesten Sinne mit der Summenformel rechnet, ohne dass er sie jemals allgemeiner anschreibt. Bei der Rekonstruktion von Lösungswegen öffnet sich das Feld für Spekulationen, zumal bei Waschkies der Formalismus der Griechen den Blick auf die babylonischen Rechenmethoden eher versperrt als weitet.

Festzuhalten bleibt, dass die Zählsteine nicht nur zur Schrift führen, sondern auch zu den Rechensteinen, für die wahrscheinlich das Wort ${}^{na}{}_{4}$na, Tonsteine, verwendet wird. Die Zählsteine verweisen nicht nur auf das Speichermedium Schrift. Mit der Einebnung der Tonumschläge wird spätestens im frühen 2. Jahrtausend die Tafel als Ort der Operationalisierung genutzt. Zu den Griechen gibt es dagegen einen fundamentalen Unterschied. Sie können die arithmetischen Kulturtechniken auf die Geometrie übertragen, weil sie mit dem Vokalalphabet einen einzigen Zeichensatz nutzen, mit dem sie Schrift und Zahlen gleichermaßen bezeichnen. Gerade weil das griechische Alphabet Buchstaben und Zahlen nicht mehr trennt, kann der Übertrag glücken. Der Unterschied zu den Anfängen der Schrift zeigt sich also zu Beginn in einer einzigen Operation: dem Wenden des Schilfrohrs. Legt man die Anfänge der Schriftsysteme übereinander, so verläuft die Grenze zwischen Mesopotamien und Griechenland genau zwischen den zwei Enden des Schilfrohrs. Schrift *oder* Zahl lässt eine Verwaltung und Buchhaltung aus den Kulturtechniken des Zählens entstehen. Schrift *und* Zahl erzeugt eine Schreibfläche, auf der das beschriftete Diagramm als eine universale Zeige- und Verweistechnik entstehen kann. Während im ersten Fall die Anfänge der Schrift bei den Rechensteinen liegen, entstehen das Büro und die Anfänge der Routine in der Fläche.

III II I

[104] Hans-Joachim Waschkies 1989: 240-243.

10 × 10: fast ein Holzweg

Die zweite Spur will ich nur der Vollständigkeit halber erwähnen. Sie ist kurz, fast ein Holzweg, und führt zu den Ägyptern. Diese Spur ist flüchtig auf die Rückseite einiger Papyri geworfen. Es sind Skizzen, die um 1500 v. Chr. entstanden sind. Sie bestehen aus 10 ×10 Punkten, die symmetrisch in Zeilen und Spalten zu einem Quadrat angeordnet sind.[105] In der 5. Zeile zerteilt sie eine horizontale Linie [vgl. Fig. 4].

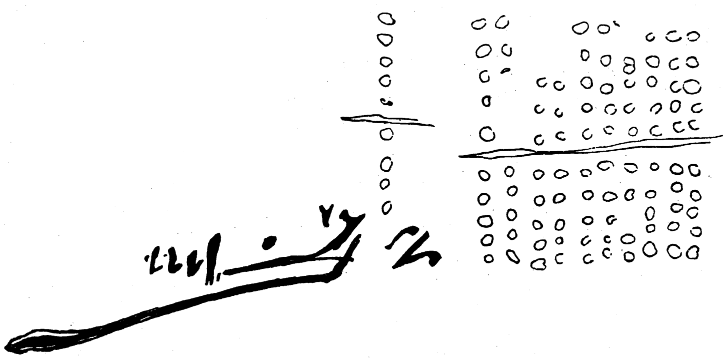


Fig. 4 – Verdopplung und Halbierung: Die Rückseite der Rechnung (Cantor 1907).

Wozu die Zeichnung gedient haben mag, darüber kann man nur spekulieren. Addition und Subtraktion sind auf ihr möglich, indem man von der Trennlinie aufwärts und abwärts zählt. Das verweist auf die Rückzählung, die für den römischen Zahlenvorrat von nicht geringer Bedeutung ist. Aber vielleicht hat die ägyptische Tafel weniger der Addition als der Multiplikation gedient. Verdopplung und Halbierung scheinen die Grundoperationen dieser Tafel zu sein. Die Mittellinie verweist auf eine *dyadische Arithmetik*, die nach Oskar Becker für Ägypten charakteristisch ist[106] und vermutlich über Thales und Pythagoras Eingang in die zahlentheoretischen Überlegungen der Griechen findet. Gegen die These, das diese Skizze wie ein Abakus funktionierte, wendet sich Cantor. Er verweist auf die Bündelung:

> Es ist klar, dass bei einem eigentlichen Rechenbrette auf dekadischer Grundlage in jeder Reihe höchstens 9 Steinchen Platz finden können, da deren 10 durch 1 Steinchen von der folgenden Reihe ersetzt werden mussten.[107]

Aber auch wenn diese Skizze kein Abbild eines Rechenbretts ist, so kann sie durchaus als Zählhilfe fungieren. Über die Existenz eines Abakus dagegen findet

III II I

[105] Pullan 1968: 9 f.
[106] Oskar Becker 1936: 541. Vgl. auch Peter Damerow / Wolfgang Lefévre 1981. S. 24 f.
[107] Moritz Cantor 1907: 189.

man keine ägyptischen Texte. Der Gebrauch des Rechenbretts wird mit keinem Wort bestätigt.[108] Auch Abbildungen fehlen, die den Umgang mit Rechenbrettern zeigen.

> Das einzige Mittel, das zur Ausführung der Rechenoperationen verwendet wurde, ist die Schrift,

schreiben Damerow und Lefévre,[109] und die Punktdiagramme können ihrem Urteil nicht entkommen. Sie funktionieren auch in der Schrift. Der Gebrauch des Rechenbretts ist in Ägypten nicht nachweisbar.[110] Dennoch findet man wie beim Abakus eine Ordnung von Zeilen und Spalten. Aber auch wenn die Punkte Einheiten bezeichnen, bleiben Fragen, die keine Antworten finden. Wie wurde mit ihnen operiert? Der Papyrus bleibt stumm. Hier endet die zweite Spur.

III II I

[108] Vgl. Peter Damerow / Wolfgang Lefévre 1981: 28.
[109] Peter Damerow / Wolfgang Lefévre 1981: 28.
[110] Dazu Moritz Cantor 1907: 189-90.

ABSTRAKTION UND ZÄHLBARKEIT

Die letzte Spur ist einer Umkodierung gewidmet, die aus der Technik des Beweises hervorgegangen ist. Sie führt zu den figurierten Zahlen der Pythagoreer, die mit griechischen Rechensteinen, den *psephoi*, gelegt werden. Die figurierten Zahlen führen nicht auf die Rückseite der Mathematik. Ihnen haftet nicht die Flüchtigkeit der Punktdiagramme an. Sie verstummen nicht, sobald man sie befragt. Stattdessen ermöglichen es die Rechensteine von Philolaos zum ersten Mal, das Gesetz der Zahl als Gesetz der Reihe von Gerade und Ungerade zu formalisieren. Die figurierten Zahlen haben nicht nur den Abakus aus den Händen der Geschäftsleute befreit. Sie haben seinen Gebrauch universalisiert. Die formalen Operationen, die von den Rechensteinen ausgehen, konzentrieren sich auf die Verfahren der Verdopplung und Halbierung, die schon den Ägyptern bekannt gewesen sind.[111] Ins Zentrum rückt der Gnomon, ein Gerät, das ursprünglich zur Messung von Sonnenständen verwendet worden ist.

Doch der Weg, den der Gnomon von der Astronomie in die Arithmetik der Pythgagoreer zurückgelegt hat, ist lang. Im folgenden will ich nicht das ganze Feld ausbreiten, auf dem der Gnomon seine mannigfaltigen Transformationen von der Sonnenuhr der Ägypter und Babylonier bis zum theoretischen Gerät durchlaufen hat. Vielmehr sollen im Zentrum zwei Aspekte stehen:

– der Übertrag räumlicher Kulturtechniken auf die Fläche und

– die Wechselbeziehungen zwischen den arithmetischen und geometrischen Kulturtechniken.

Der Umgang mit Proportionen ermöglicht den Griechen einen wesentlich formaleren Umgang mit den Zählsteinen. Diese Geschichte der Abstraktion, die auf Zählbarkeit beruht und nirgendwo vollständig niedergelegt ist, soll hier anhand des Gnomons untersucht werden. So gilt es in einem ersten Schritt das Feld zu durchmessen, auf dem Proportionen zum ersten Mal zählbar werden. Dieses Feld sind die Fundamente der Tempel. Die griechischen Abaci gründen weniger auf den Tokens aus Uruk. Sie sind nicht handlich und mobil, sondern tonnenschwer. Ihre Vorläufer findet man in den Säulentrommeln auf Samos. Der Übertrag von den unhandlichen Abaci auf die Schreib- und Rechenflächen der Geometrie kennt einen Boten: Anaximander. Das zylinderförmige Universum Anaximanders, das

[111] Oskar Becker 1936: 548.

sich explizit auf die Säulentrommeln bezieht, überträgt den Gnomon von der Astronomie auf die Schreibfläche. Mit ihm wandert die Lehre vom geraden und Ungeraden vom Raum auf die Fläche aus.

Auch wenn ich meine Untersuchung am Schattenstab ausrichte, so ist sie weniger an Licht und Schatten orientiert. Sie folgt vielmehr dem Gnomon als ein Werkzeug, mit dem man messen und zählen – zeigen und verweisen kann. Die Abstraktion, die die figurierten Zahlen in den ersten induktiven Beweisverfahren in Gang setzen, beruht auf Zählbarkeit. Die Zählbarkeit ebnet der deduktiven Geometrie den Weg. Sie ermöglicht es, dass aus der Spitze des Gnomon sich die Elemente der Planimetrie entfalten: Punkt, Linie, Kreis, Winkel und Fläche. So bleibt zu zeigen, wie der Gnomon zum Setzkasten der Geometrie wird, wie alle klassischen Probleme der Geometrie sich aus dem begrenzten Typensatz des Gnomon zusammensetzen.

Über den Schattenstab und einen unsicheren Zeugen

Ursprünglich von den Babyloniern entwickelt, ist der Gnomon ein Stab, der senkrecht zur Horizontlinie steht. Anaximander, ein Schüler von Thales, habe im 6. Jahrhundert die Sonnenuhr erfunden und sie auf einem geeigneten Platz in Sparta aufgestellt, das berichtet Diogenes Laertius.[112] Doch schon der Beginn seines eigenen Berichtes enthält Widersprüche. Diogenes schreibt ebenso Thales, dem Lehrer von Anaximander, den Umgang mit dem Gnomon zu. Die Höhe der Pyramiden habe er mit dem Schatten seiner Begleiter gemessen, das Jahr in 365 Tage eingeteilt und Jahreszeiten eingeführt.[113] Herodot schreibt lediglich, dass die Griechen den Gnomon von den Babyloniern und Ägyptern übernommen haben.[114] Wenn Anaximander schon nicht der erste war, der den Gnomon benutzt hat, was macht ihn dann so erwähnenswert? Die Bemerkung von Diogenes deutet zumindest an, dass der Gebrauch des Abakus ab dem 6. Jahrhundert in Griechenland üblich ist. Über die Sonnenuhr, die Anaximander um 550 v. Chr. in Sparta aufstellen lässt,[115] schreibt Diogenes:

III II I

[112] Diogenes Laertius II 1-2
[113] Diogenes Laertius I 27.
[114] Herodot Historien II 109.
[115] Zur Datierung über die Lakonische Trinkschale mit Weltbild s. Gerard Naddaf 2003: 33 f.

> Sie ließ die Wendekreise und die Tag- und Nachtgleiche erkennen.[116]

Während Diogenes in vielen Details widersprüchlich ist und als unsicherer Zeuge gilt, werden die Sonnenwenden und Tagundnachtgleichen aber auch von anderen Quellen mit dem Namen Anaximanders verbunden. Er hat diese Daten mit dem Gnomon gewonnen. Aber welches Verfahren hat er dabei verwendet? Auf diese Frage gibt es viele abweichende Antworten. Sie reagieren auf eine Unbekannte: Wie sah der Gnomon aus, den Anaximander verwendet hat? Eine Antwort muss entscheiden, mit welchen Vorannahmen Anaximander operiert hat: Welche Gestalt hat er der Erde und dem Himmel zugeschrieben?

In diesem Kapitel nehme ich zwei Anläufe, ehe ich zu einer Schlussfolgerung komme. In einem ersten Teil gehe ich genauer auf Anaximanders Universum ein. Er beschäftigt sich mit den Grundrissverfahren der Tempel und den Proportionen von Anaximanders Himmelsmodell. In einem zweiten Teil diskutiere ich anhand der spärlichen Quellen, unter welchen Bedingungen und wann der Übertrag astronomischer Kulturtechniken auf die Geometrie und Arithmetik stattgefunden haben könnte und welchen Anteil der Gnomon bei der Konstruktion von Idealität besitzt. Vorab sei vermerkt, dass eine Beschreibung fehlt. Die Quellenlage ist so dünn, dass auf diese Frage nur Indizien antworten können.

Über Säulen und Schattenfänger und über eine Arithmetik der Steine

Welchen Schattenstab hat Anaximander benutzt? Von zwei Arten berichtet schon Herodot: *polos* und *gnomon*.[117] Der Polos besitzt die Form einer Halbkugel. Ihre Schnittfläche ist parallel zum Horizont ausgerichtet. In ihrem Mittelpunkt ist ein Schattenstab befestigt. Die einfachere Ausführung ist der Gnomon: ein schlichter Stab, der senkrecht aufgestellt ist und seinen Schatten auf jeden Fußboden wirft. Während der Polos komplizierter konstruiert ist, ist er einfacher zu benutzen. Denn jede Linie, die der Schattenstab vom Sonnenaufgang bis zu ihrem Untergang auf die Oberfläche zeichnet, ist ein Halbkreis und verläuft parallel zur Schnittfläche. In der Ebene hingegen erzeugen die Schattenkurven des Gnomon Hyperbeln, die sich im Sommer dem Schattenstab zuneigen im Winter in die entgegengesetzte Richtung weisen. Doch um überhaupt den Vorteil dieser

III II I

[116] Diogenes Laertius II 1.
[117] Herodot Historien: II 109.

Konstruktion zu nutzen, müssen einige Bedingungen erfüllt sein. Sie betreffen die Gestalt des Himmel und sind keineswegs selbsterklärend. Denn die kreisförmige Schattenlinie ist konstruiert. Sie stellt sich nur ein, wenn der Polos als Modell des Himmels und der Erde gilt. Die halbrunde Form des Polos verweist verweist also auf die Kugelgestalt der Erde. Der Polos ist dabei zugleich der stumme Zeuge eines geozentrischen Weltbilds. Diogenes schreibt, dass Anaximander von der Kugelgestalt der Erde ausgehe.[118] Aber das ist wenig glaubwürdig. Denn er ist der einzige Zeuge. So ist es auch schwer nachvollziehbar, dass Anaximander die Berechnungen wie Vitruv mit dem Gnomon durchgeführt hat.[119]

In der Mehrheit der doxographischen Quellen ist die Zylinderform überliefert. Und das mit einem größeren Detailreichtum. So schreibt Pseudo-Plutarch über Anaximanders Welt:

> Der Gestalt nach, sagt er, sei die Erde zylinderförmig; ihre Tiefe mache ein Drittel ihrer Breite aus.[120]

Vielleicht hat der daktylische Hexameter Anaximander geholfen, die Dreizahl des Universums zu verinnerlichen. Doch bezeugt ist bei Anaximander lediglich die Architektur. Über die »zylinderförmige Erde« schreibt Hippolytes:

> Ihre Gestalt ist gebogen, rund, ähnlich der steinernen Trommel einer Säule; von ihren ebenen Flächen laufen wir auf der einen herum, und die andere Seite ist ihr entgegengesetzt.[121]

An dieser Stelle fällt zum ersten Mal der Hinweis auf die Säulentrommel – was hat es mit ihr auf sich? Wählt Anaximander tatsächlich nur eine Analogie? Auffällig ist eine Koinzidenz. Um Milet entstehen seit dem späten 7. Jahrhundert monumentale Steintempel, die ihre Vorgänger aus Holz ersetzen und um ein Vielfaches an Größe übertreffen. Um 575 beginnen Theodoros und Rhoikos mit dem Bau des Heratempels auf Samos, der es auf 134 Säulen bringt.[122] Nur wenig später, um 560, folgen Chersiphron und Metagenes mit dem Bau des Artemistempels in Ephesos, der 127 Säulen besitzt. Seine Ausmaße müssen den Zeitgenossen so gewaltig erschienen sein, dass sie den Artemistempel in den Stand eines Weltwunders erhoben haben. Der Neubau des Heratempels auf dem Fundament des

III II I

[118] Diogenes Laertius II,1.

[119] Entgegen Szabo, der indirekt aus der Beschreibung von Vitruv Anaximanders Verfahren erschließt 1982: 60-63.

[120] DK 12 A 10. Soweit nicht anders vermerkt, Übersetzung immer zitiert n. Geoffroy Kirk u. a. 1994.

[121] DK 12 A 11.

[122] Für Herodot ist es der »gewaltigste Tempelbau, von dem wir wissen« (Historien III 60). Zur Datierung über eine Keramik, die sich unter den Fundamenten des Tempels befand vgl. Robert Hahn 2001: 71.

alten Tempels, der unter Polykrates um 530 beginnt, überbietet mit 143 Säulen seine Vorgänger.

Die Grundlage dieser Säulenschlacht, die nicht nur an der ionischen Küste tobt, ist zylinderförmig. Es ist die Säulentrommel. Obwohl sie auch schon ein Jahrtausend früher in Mesopotamien zu finden ist, wird sie wohl von Ägypten, über Naukratis mit dem Winkelmaß, der Wasserwaage, dem Bronzehohlguss und der ägyptischen Bauelle nach Griechenland gelangt sein.[123] Die Säule ermöglicht die Modularisierung der Architektur. Auf den Fundamenten der großen ionischen Tempel gehen um 600 die Proportionen der Säulen mit der Geometrie und der Arithmetik ihre erste sichtbare Verbindung ein. So ist die Säule in der Tat mit dem Gnomon verwandt. Doch diese Verwandtschaft liegt nicht offen zutage. Denn die Säule ist strenggenommen gerade kein Schattenfänger. Sie zeichnet wegen ihrer Höhe nur ungenau die Schatten der Sonnenstrahlen auf den Boden. Vielmehr ist die Geometrie der Proportionen das verbindende Glied. Das Grundmaß des Tempels ist die Säulentrommel. Um sie gruppieren sich die Grund- und Aufschnürungsverfahren der Handwerker und Baumeister. Von nicht geringer Bedeutung ist dabei das Winkelmaß (gnomon) und mit ihr viele Techniken, die aus dem rechten Winkel entstehen. Denn für die Griechen, die jede Rechenoperation als Diagramm anschreiben, stehen die Schenkel des rechten Winkels zugleich für Multiplikation und Division, für Reihen und Proportionen. Auf den Fundamenten der Steintempel gehen Gnomon und Abakus ihre ersten Verbindungen ein.

Die Arithmetik der Säulenreihen

Das auffälligste Merkmal der neuen Tempel sind Säulenreihen, die zwei- bis dreifach um die Außenmauern des Tempels gefaltet sind und selbst das Innere der Cella durchziehen und rastern. Es sind Tempel mit Ringhallen. Die Säulen haben dabei mindestens zwei Funktionen. Sie stehen häufig in der Flucht von Mauern. Sie sind einerseits die Stützen der Dachkonstruktion. Sie garantieren andererseits die Einhaltung der Proportionen. Schon die Ägypter nutzen ein Gitternetz, um

[123] Über die ägyptischen Einflüsse auf Theodoros und Rhoikos und die Verbindung zwischen dem Apollotempel in Naukratis und den Dipteros in Ephesos vgl. Anargyros Petronotis 1972: 32.

Zeichnungen vom Papyrus auf die Wand zu übertragen. Die Hilfslinien finden sich zuweilen noch als rote Kreidelinien an unvollendeten Grabwänden.[124] Und auch für den Tempelbau verwenden die Ägypter eine ähnliche Technik, wie eine Skizze mit roter Tinte im Steinbruch von El-Sheikh Said zeigt.[125] Die Säulen sind nicht

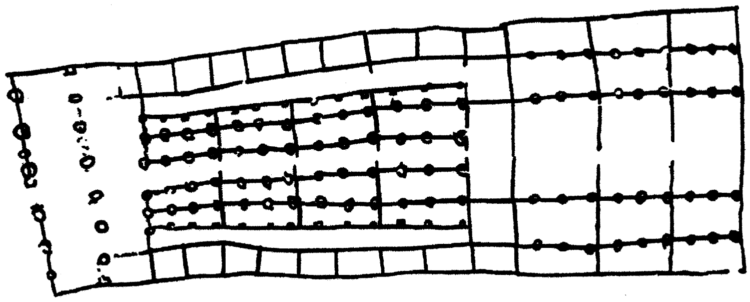


Fig. 5 – Inschrift aus dem Marmorbruch von Sheikh Said (Hahn 2001).

mehr als Punkte. Sie stehen auf den Linien eines Rasters. Doch was bedeuten die Linien? Sie veranschaulichen die Arbeit mit Seil, Reißzeug und Rötel. Aufschnüren und Reißen stehen bei den Ägyptern so hoch im Kurs, dass diese Verfahren in ein königliches Zeremoniell eingebunden sind. Jeder Plan muss zur Prüfung dem König vorgelegt werden.

Da die Pläne keine Skalierung besitzen, entsteht die Aufsicht der Gebäude 1:1 mit Rötel und Reißzeug direkt unter den Füssen der Herrscher. Der König legt selbst die Ausrichtung des Gebäudes fest, indem er die Hauptlinien mit Seilen absteckt. Der Architekt vollendet dann den Grundriss auf den Plastersteinen des Fundamentes. Vorzeichnungen und Ritzungen sind zahlreich.[126] Auch Modelle sind beim königlichen Seilspannspiel hilfreich. Sie dienen der Anschaulichkeit.

Die Griechen haben die Arbeit mit dem Schnürbock im 7. Jahrhundert von den Ägyptern übernommen. Kein Plan zeigt eine Skalierung.[127] Tonscherben hingegen geben Details im Maßstab 1:1 wider. Dennoch zeigen die Messungen der Archäologen, dass viele Fundamente einem Raster folgen. Die Abstände zählen

III II I

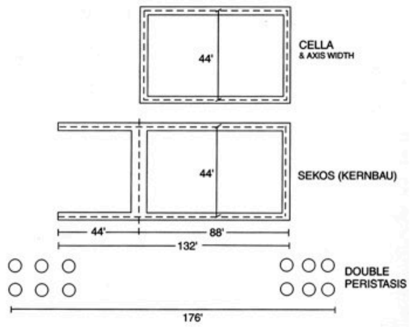
[124] Robert Hahn 2001: 107.
[125] Dieter Arnold 1991: S. 8 und 10. Davies: 1917 21-25.
[126] Anargyros Petronotis 1972: 7 f.
[127] Petronotis sieht jedoch im Fehlen dieser Funde keinen hinlänglichen Beweis. Er wagt Hypothesen, die auf indirekten Verfahren beruhen. Skizzen und Pläne werden mit den Ausmaßen von Fundamenten verglichen und der Maßstab nachträglich errechnet (1972: 29). Dies sind zweifellos nicht mehr als Indizien, denen neuere Forschungen keinen Glauben schenken (Kienast 1985: 118; Hahn 2001: 107-110). Bis heute bleibt der archäologische Nachweis aus.

ionische Ellen, Fuß- und Fingerbreiten.[128] Sie verdoppeln sie oder halbieren sie. Man kann an die ägyptischen Punktdiagramme denken und im Gedanken mit Säulen rechnen. In beiden Fällen ähneln sich die Operationen. Lediglich in der Skalierung gibt es einen Unterschied. Der Abakus hat wahrhaft monumentale Ausmaße und jeder Stein kann nur einmal gesetzt werden. Denn auch bei den Griechen wird der Plan direkt auf das Fundament des Bauwerks gezeichnet. Wie sehr der Tempelgrund zum Abakus wird, veranschaulicht besonders eindrucksvoll das Artemision C in Ephesos. Der Tempel schöpft seine Proportionen aus einer arithmetischen Reihe, die aus den ersten vier natürlichen Zahlen besteht:

Artemision C (»Pythagorastempel«)

Westwand	4 Fuß
Achsbreite	44 Fuß
Hof	88 Fuß
Sekos	132 Fuß
Doppelte Ringhalle	176 Fuß

Quelle: Wilfried Schaber 1982



Quelle: Robert Hahn 2001

Fig. 6 – Die Zahlenreihen des Artemision C

Das Artemision C ensteht im späten 7. Jahrhundert unter Pythagoras, dem Tyrannen aus Ephesos. Das Maß des Hofs beträgt 88 Fuß, das Maß des Proanos 44 Fuß. Der Kernbau, Proanos und Hof, messen zusammen 132 Fuß, zusammen mit der Ringhalle ergeben sich 176 Fuß. Es entsteht also eine arithmetische Reihe, die die Glieder 44, 88, 132 und 176 enthält. Die Differenz der Summanden ist 44 und der gemeinsame Teiler 11. Nennt man die Differenz Δ, und a_i ein beliebiges Glied der Reihe, dann ergibt sich für die Summe aller Glieder:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = \Delta + 2\Delta + 3\Delta + 4\Delta \qquad 1.1$$

oder um es noch deutlicher zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = \Delta(1+2+3+4) \qquad 1.2$$

Wie der gemeinsame Teiler die Proportionen des Tempelgrundrisses bestimmt, zeigt noch einmal die nachfolgende Tabelle [Fig. 7]. Sie veranschaulicht auch, wie

III II I

[128] Vitruv führt deutlich vor Augen, dass über die Fußspur der Körper zum Maß der Proportionen geworden ist. (III, 1,1;5;9).

die Proportionen auf dem Rechenbrett mit akrophonischen Zahlzeichen gelegt werden können. Von ihnen soll später noch die Rede sein. Hier sei nur soviel verraten, dass sie die Kolumnen der Rechenbretter bezeichnen. Die Zahlzeichen zeigen, auf welche prägnante Art, die Rechensteine den Griechen die Summenformel der Reihe [1.2] vor Augen führt.

Bauteil	Faktor	Psephoi
Vorhalle...........................	**1**·11 ΔI	●
Hof	**2**·11 ΔΔII	● ●
Vorhalle+Hof	**3**·11 ΔΔΔIII	● ● ●
Vorhalle+Hof+Ringhalle ..	**4**·11 ΔΔΔΔIIII	● ● ● ●

Fig. 7 – Das Tempelfundament als Abakus. Die Proportionen des Artemision C.

Betrachtet man nur die Faktoren, so erhält man eine endliche Reihe der natürlichen Zahlen. Sie enthält die Proportionen, die den Grundriss des Tempels bestimmen. Bildet man die Summe der Faktoren und zählt die ersten vier Zahlen zusammen, so erhält man 10. Die Zahl 10 ist in den Augen der Pythagoreer eine vollkommene Zahl, über die Philolaos schreibt:

> Man muß die Werke und das Wesen der Zahl nach der Kraft beurteilen, die in der Zehnzahl liegt. Denn sie ist groß, allvollendend, allwirkend und göttlichem und himmlischen sowie menschlichen Lebens Anfang und Führerin.[129]

Die Summe der ersten vier natürlichen Zahlen steht also im Zentrum der pythagoreischen Zahlenlehre. Über die Zahlen schreibt Philolaos gleich im Anschluss:

> Denn nichts von den Dingen wäre irgendwem klar, weder in ihrem Verhältnis zu sich noch einander, wenn die Zahl nicht wäre und ihr Wesen. Nun aber bringt diese innerhalb der Seele alle Dinge mit der Wahrnehmung in Einklang und macht sie dadurch erkennbar und einander entsprechend nach der Natur des Gnomon, indem sie ihnen Leiblichkeit verleiht und die Verhältnisse der Dinge jegliches für sich scheidet, der grenzenlosen ebenso wie der grenzbildenden.[130]

Worin aber findet Philolaos die Natur des Gnomon? – Vermutlich in der Reihe der natürlichen Zahlen. Und was verschafft ihnen Leiblichkeit? – Die Rechensteine und die Tektratys. Aus jenem gleichseitigen Dreieck, das aus Rechensteinen gebildet wird, entstehen die pythagoreischen Intervalle, die jeweils eine gerade (»grenzbildende«) und eine ungerade (»grenzlose«) Zahl aufeinander beziehen oder wie es an anderer Stelle von Philolaos überliefert ist, »Ungleiches« und »Un-

III II I

[129] DK 44 B 11.
[130] DK 44 B 11.

verwandtes« miteinander verbinden.[131] Mit der Zehnzahl kodiert Philolaos die Harmonie:

> Der Harmonie Größe [1:2] umfasst die Quarte [3:4] und die Quinte [2:3].[132]

Die Oktave ist also direkt dem Verhältnis zwischen Hof und Kernbau, Kernbau und Tempel abgeschaut. Hier wird sichtbar, dass die Zehnzahl für die Pythagoreer zum Greifen nah ist. Sie ist gerade deshalb göttlich und himmlisch, weil die Oktave sich an den Proportionen des Tempelbaus orientiert.[133] Auch wenn die Formulierung von »des Zeigers Natur« weitgehend im Dunkeln bleiben muss, so scheint doch eins sicher: Der Gnomon ist so untrennbar mit der Lehre vom Geraden und Ungeraden verbunden, dass seine Funktion – die mechanische Ausgabe von Reihen – den Pythagoreern zur zweiten Natur geworden ist. Aber davon später.

Auf Fundamenten zeichnen

Schon der Tempelbau zeigt, dass die arithmetischen und geometrischen Kulturtechniken eng miteinander verbunden sind und diese Verbindung einige zahlentheoretische Überlegungen nahelegt. Die Verbindung von Arithmetik und Geometrie beruht auf der Doppelkodierung des griechischen Alphabets, auf die ich noch zu sprechen komme. Die Fundamente der Tempel werden zu einem riesigen Rechenbrett. Am Dipteros I, jenem Tempel, den Rhoikos und Theodoros auf Samos erbaut haben, sind Linien auf den Säulenfundamenten und dem Fundament der Cella zu erkennen.[134] Beim Schatzhaus, dem »Tempel D«, wurde sogar eine vollständige Zeichnung entdeckt, die 1:1 mit roter Kreide den Grundriss des Tempels zeigt.[135] Das ist der früheste Fund eines Grundrisses auf griechischen Boden. Die Geometrie dieses Rechenbretts folgt dem Gnomon und dem rechten Winkel. Der riesige Zeichentisch bezieht seine Linien von einem Schnürbock, der noch heute jedem Maurer vertraut ist, um Steinreihen gerade und lotgerecht auszurichten. Die Ausgrabungen an den Fundamenten des Dipteros I, einem frühen Heratempels, haben eigentümliche Blöcke aus Poros zu

III II I

[131] DK 44 B 6 und Aristoteles Metaphysik I 5,20.
[132] DK 44 B 6.
[133] Vgl. Robert Hahn 2003: 109-116 mit weiteren Literaturangaben.
[134] Oscar Reuther 1957: 19. Über den »Tempel D« s. Andreas Furtwängler / Hermann J. Kienast 1989: 27. und Tafel 12, Abb, 3 - 4. Im Heraion steht heute nur noch eine knapp 11 m hohe Säulenruine. Furtwängler und Kienast stützen ihre Rekonstruktionen auf die Ritzlinien.
[135] Hermann Kienast 1985: 112.

Tage befördert.[136] Es sind steinerne Schnürblöcke. Sie sind die Wärter der Parallelen und des rechten Winkels. Die Linien finden sich auch auf den Schnürblöcken. Die Linien legen nicht nur die Ausmaße des Fundamentes fest, sondern auch die Dicke der Mauern, die Fluchten der Säulen.[137] Sie machen die Blöcke zu beredten Zeugen einer Praxis, die Gebäude 1:1 auf der Zeichenfläche entstehen lässt. Ritzlinien finden sich auf jeder Ebene des Baus. Der Grundriss wächst mit dem Bau. Die Säulenraster des Heratempels, die Anaximander als Vorbild dienen, sind deshalb nicht nur die dreidimensionale Umsetzung der Hilfslinien im Raum. Auf dem Riss oder Linien wie diesen, gründen die Fundamente der deduktiven Geometrie.

Auch die Griechen verwenden Modelle und Pläne. Doch erst zur Mitte des 4. Jahrhundert sind Skalierungen nachweisbar. So ist gerade der unbetretbare Bezirk des Apollotempels von Didyma, das Adyton, auf knapp 200 m^2 mit »spinnenwebenfeinen Linien« überzogen.[138] Die Fläche auf der Sockelhöhe wird zunächst mit Rötel eingerieben, dann werden die Linien mit einem Metallstift auf die Marmorfläche geritzt, so dass die Konturen sich weiß gegen das Rot der Zeichenfläche absetzen. Baustücke, die wegen ihrer Größe nicht mehr auf die Mauern des Adyton zu bannen sind, werden in der Länge gestaucht dargestellt. Die Entasis beispielsweise, die Krümmung der 18 m hohen Säulen, hätte einer 1 km großen Zeichenfläche bedurft, um den Mittelpunkt der kreisförmigen Krümmung darzustellen. Der Schaft wurde deshalb in der Höhe gestaucht [Fig. 7]. Ein Fuß auf der Säule entspricht auf der Zeichenfläche einer Fingerbreite. Der Verkleinerungsmaßstab liegt also in der Vertikale bei 1:16. Da die Breite weiterhin im Maßstab 1:1 gezeichnet ist, kann die Entasis direkt mit dem Zirkel abgegriffen werden und auf die Säulentrommeln übertragen werden.[139] Wann sich diese Praxis der kunstvollen Verzerrung durchgesetzt hat, kann nicht mit Gewissheit gesagt werden, da die Ritzlinien weitestgehend nach der Fertigstellung beseitigt worden sind oder die Zeit sie allmählich gelöscht hat.

III II I

[136] Vgl. Oscar Reuther 1957: 24.
[137] Anargyros Petronotis 1968: 5.
[138] Lothar Haselberger 1983: 14 und 16.
[139] Vgl. Lothar Haselberger 1983: 16-18.

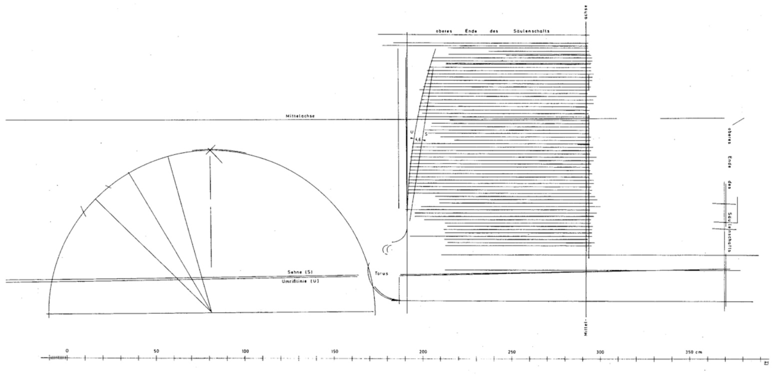


Fig. 7 – Vollständige Darstellung der Entasis einer 18m hohen Säule des Apollotempels von Didyma nach 334 v. Chr. Die Höhe ist gestaucht, die Breite 1:1 auf den Sockel des Adyton gerissen (Haselberger 1983).

Das 6. und 7. Jahrhundert hingegen kennt nur den Grundriss im Maßstab 1:1. So liegt die Vermutung nahe, dass die eindimensionale Skalierung im Zusammenhang mit der Fortentwicklung der Diagramme steht. Bevor das beschriftete Diagramm das Konstruieren und Planen erleichtert, bevor Archytas das Diagramm aus dem festen Griff der deduktiven Geometrie befreit, folgt die architektonische Zeichnung ihren eigenen Unterscheidungen. Das Modell geht entweder im Bauwerk auf. Dann löscht der Aufbau sukzessive die Linien des Grundrisses. Oder es ist mit dem Bauwerk identisch. Weder Identität noch Nichtidentität bauen auf eine Verweistechnik. Das Modell ist entweder gleich oder ungleich. Es kann in der griechischen Welt des 7./6. Jahrhunderts nicht als maßstabsgetreue Miniatur des Bauwerks gedacht werden. Die *syngraphé* ist eine technische Beschreibung des Bauwerks mit Schrift und Zahl. *Syngraphé* bezeichnet zugleich auch einen Vertrag.[140] So heißt es etwa in einer Inschrift von Eleusis:

> Man breche Steine aus den Marmorbrüchen des Pentelikon, 17 Fuß lang, 2 Fuß breit und 1 1/2 Fuß dick, forme Blöcke, begradige sie, und übergebe sie, damit sie intakt, weiss und ohne jeden Makel verladen werden können. Ihre Anzahl ist 8. 8 Marmorblöcke des Pentelikon, 17 Fuß lang, 2 Fuß breit, 1 1/2 Fuß dick, gerade und rechtwinklig an allen Seiten, müssen vom Pentelikon nach Elevsís transportiert werden, und am Heiligtum intakt und ohne jede Bruchspur abgeladen werden...[141]

Kein Tempel entsteht aus den Worten dieser Inschrift. Eine Skizze fehlt. Stattdessen wird der Weg eines jeden Steins vom Bruch zur Baustelle detailreich beschrieben. Die Aufzählung ist weniger ein Plan. Sie steht mit ihren wortgenauen Wiederholungen einem Vertrag oder irgendeiner Form der Buchhaltung viel

III II I

[140] J. James Coulton 1977: 54.
[141] Zit. n. J. James Coulton 1977: 55.

näher. Die *syngraphé* kann deshalb niemals mit dem Bauwerk zusammenfallen. Sie ist von ihm geschieden. Der Riss, *gramma*, oder die Umrisslinie, die im 5. Jahrhundert *hypographé* oder seltener *diagramma* genannt werden, gründen auf den Aufschnürungsverfahren.[142] Sie entstehen auf dem Fundament des Bauwerks oder wie im Fall des Apollotempels auf dem Sockel des Adytons. Die Bezeichnung *anagraphé* ist nicht immer auf der Seite des Bildes. Doch Proklos verwendet sie in seinem Kommentar zum ersten Buch mehrmals als Synonym für »Diagramm« und »einfache Zeichnung«.[143] Auch das Modell, das *parãdeigma*, funktioniert im Maßstab 1:1. Die Triglyphen und Kapitelle beispielsweise werden 1:1 in Ton, Holz oder Gips umgesetzt, ehe die endgültige Form in Stein gehauen wird. So können die Maße ohne jede Umrechnung mit dem Zirkel vom Modell auf das Werkstück übertragen werden.[144] Denn dieses ist mit seinem Modell identisch. Zeichnung und Modell setzen auf Identität.[145]

Die Bautechniken gleichen noch den Zählsteinen in den Bullen. Denn noch kündigt sich keine Technik an, die Zeichnung und Bau aneinander bindet. Der Riss braucht das Fundament. Ohne sie wächst keine Mauer. Eine Technik, die Abstraktion herstellt, indem sie die Identität durch Selbstreferenz ersetzt, ist noch nicht in Sicht. Und dennoch gründen die Anfänge der griechischen Mathematik auf eigentümliche Art auf den Bauverfahren der Tempel. Doch entspringen sie nicht allein der Linie, sondern sind das Produkt von Überträgen zwischen Bild, Schrift und Zahl. Auf dem Fundament der Tempel und des griechischen Alphabets gehen arithmetische und geometrische Kulturtechniken eine folgenschwere Verbindung ein. Denn aus den Proportionen der Säulentrommel entstehen nicht nur die Ordnung der figurierten Zahlen, wie das Raster des Artemision C von Ephesos sichtbar macht. Auf der Arithmetik der Tempelfundamente beruht auch das kunstvolle Anlegen von Flächen. Über einer Linie ein Parallelogramm zu errichten – dieser Typ von Aufgabe, der so paradigmatisch für die geometrische Algebra ist,[146] gründet auf den Fundamenten ionischer Tempel. Doch die Linien entspringen nicht mehr einem Schnürbock, sondern dem Diagramm. Aus der Verbindung von *syngraphé* und *gramma*, der

III II I

[142] Zur Geschichte der Bezeichnungen Petronatis 1972: 9-13.
[143] Proklos *Elem.* I 1 und I 46.
[144] J. James Coulton 1977: 55-56.
[145] Robert Hahn 2001: 134-136.
[146] Vgl. z. B. Euklid I 44-46 und den Kommentar von Proklos zu I 44, sowie Euklid Buch II und VI 29-31.

Verbindung von Buchstaben und Linien, entstehen die Aufgaben und Lehrsätze der Geometrie. Zusammen mit der Zeichnung ermöglicht es die formelhafte Sprache, jedes beliebige Objekt zielsicher zu adressieren, ohne dass es jemals einen Bruch besiedeln, die Papyrus- oder Tafeloberfläche verlassen muss. Im folgenden bleibt zu zeigen, wie der Übertrag vom Tempelfundament zum Diagramm vom Gnomon bewerkstelligt wird. Dazu muss sich die Zeichnung von den Dingen trennen, Identität durch Selbstreferenz erlangen.

Mit Säulentrommeln rechnen

Beim Tempelbau besitzen die Proportionen offenbar Priorität. Eine messgenaue Umsetzung wird selten verfolgt. Selbstreferenz hingegen ist ausdrücklich erwünscht. Der Abgleich der Proportionen erfolgt am Bauwerk selbst. Das Grundmaß des Tempels, das, was Vitruv später *modulus* nennt,[147] ist die Säule. Der Durchmesser der untersten Trommel enthält die Proportionen der Säule. Auch wenn auf Samos nicht mehr als ein einziger Säulenstumpf die Zeit überdauert hat, so gibt es doch annähernd 600 Säulenfragmente, die über die Proportionen des Dipteros II Aufschluss geben. Furtwängler und Kienast haben herausgefunden, dass die Säulenhalle im Gegensatz zum Kernbau einem Raster folgt, dem der samische Fuß zugrunde liegt.[148] Der Durchmesser der unteren Säulentrommel beträgt genau 3 samische Fuß. Ihre Tiefe misst 1 samischer Fuß. Die Jochweite, der Abstand zwischen den Säulenachsen, beträgt genau 6 1/4 Ellen. Die Höhe der Säulen misst das Zehnfache der Säulentrommel: 30 samische Fuß.[149] Die Proportionen der Säulenhalle gründen vollständig auf der Dreizahl.

Doch noch zeichnen die Griechen auf den Boden des Tempels. Eine Lehre der Proportionen, die sich vom Tempel gelöst hat, sucht man vergebens. Erst Anaximander löst die Proportionen vom Raum und überträgt die Proportionen des Tempels auf die Fläche:

> Der Gestalt nach, sagt er, sei die Erde zylinderförmig; ihre Tiefe mache ein Drittel ihrer Breite aus,

I I I   I I   I

[147] Vgl. Vitruv III 1 9.
[148] 1 samischer Fuß = 34,5 cm und 1 samische Elle = 52,4 cm.
[149] Andreas Furtwängler / Hermann Kienast 1989: 60.

schreibt Pseudo-Plutarch.[150] Das Grundmaß des Tempels, der vor Anaximanders Haustür aus dem Sumpf des Heiligtums wächst, taucht also an dieser Stelle in der Gestalt der Erde auf. Aber manches bleibt unklar. Was bezeichnet bei Anaximander die »Tiefe«, was die »Breite«? Da das Vorbild die Grundrissverfahren des Tempelbaus sind, ist wahrscheinlich, dass Anaximander die Aufsicht favorisiert. Dann ist mit der »Breite« der Durchmesser des Zylinders und mit der »Tiefe« die Höhe des Mantels gemeint. Anaximanders Erde weist also die gleichen Proportionen wie die samische Säulentrommel auf. Das Verhältnis von Mantel zu Kreisdurchmesser ist 1:3. Der Heratempel, den Theodoros um 575 gebaut hat, ist das Modell für Anaximanders Welt. Das Verhältnis von Cella zu Kernbau, das einzige einigermaßen verlässliche Maß, beträgt dort ebenfalls 1:3.[151] Doch wie weit trägt der letzte Vergleich? – Nicht allzu weit. Denn Messungen haben immer wieder ergeben, dass die Breite der Mauern stark variiert. Im Gegensatz zur Ringhalle folgt der Kernbau deshalb gerade keinem Maßsystem. Zugleich folgen die Maße weder der ägyptischen Königselle, noch der samischen Elle oder irgendeinem anderem attischen Maß. Sie fügen sich nicht den einfachen Proportionen einer arithmetischen oder geometrischen Reihe.[152] So bleibt gegen die Studie von Couprie und Hahn zu zeigen, dass nicht Cella und Kernbau die Proportionen von Anaximanders Weltbild vorgeben, sondern Anaximander alle Zahlen in der Tat von den Proportionen der Säulentrommel bezieht.

Die Säule ist dabei nicht irgendein Bauteil. Sie ist das Grundmaß, aus dem der Tempel entsteht. Bei Anaximander wird sie zur Einheit des Universums. Über Anaximanders Himmelskörper schreibt Hippolytos:

> Der Kreis der Sonne sei 27mal so groß wie die Erde und der des Mondes 18 mal so groß...[153]

Analog zum Durchmesser der Erde muss zweifellos auch bei der Größe der Ringe sodann der Durchmesser als Längenmaß herhalten. Wäre beispielsweise 27 das Maß für den Radius des Sonnenrings, wie Couprie und Hahn meinen,[154] so wäre

III II I

[150] DK 12 A 10.
[151] Oscar Reuther 1957: 58; Robert Hahn 2003: 103.
[152] Oscar Reuther 1957: 57-58; Andreas Furtwängler / Hermann Kienast 1989: 60.
[153] DK 12 A 11.
[154] Robert Hahn 2003: 79 und 84. Ebenso zweifelhaft ist die Berechnung des Umfangs. Hahn benutzt hier als Kreiszahl den Wert 3 (2003: 146) und fällt damit hinter die Ägypter zurück, die schon im Papyrus Rhind (Nr. 48, 50) bei der Volumenberechnung der kugelförmigen Fruchthäuser mit einer Annäherung von p=3,1604... gerechnet haben. Couprie (2003: 212) nennt zwar Gründe für die Verwendung der Zahlen als Entfernungsangabe, doch sind sie wenig stichhaltig. Eine Karte kann zweifellos mit Radien oder Durchmesserangabe gezeichnet werden. Über den Durchmesser

die Sonne nicht 27 sondern 54 mal größer als die Erde. Doch das entscheidende Argument liefern die schwankenden Maße der Mauern. Coupries Zahlen lassen sich nur auf die Mauern, aber nicht auf das Säulenmaß beziehen. Da aus der Einheit aber die Axiomatik des Punktes und der Zahl erwächst, ist dieser Unterschied für die Anfänge der deduktiven Geometrie bedeutsam.

Doch Anaximander überträgt nicht nur die Maße der Säulentrommel auf die Schreibfläche seines Universums. Auch die Form ist kompatibel zur Planimetrie der Bildflächen. Dafür sorgt eine weitere Analogie. Nach Aetius vergleicht Anaximander den Sonnenring mit einem Wagenrad.[155] Anaximander hat mit diesem Vergleich keine ferne Metapher bemüht, sondern den Bezirk des Tempels nicht verlassen. Das zeigt eine Erfindung von Chersiphron. Die Säulentrommeln besitzen zwei natürliche Feinde: das Meer und ihr eigenes Gewicht. Wie der Heratempel entsteht auch das Artemision in Meeresnähe auf sumpfigem Boden. Das Gewicht hat sich erheblich erhöht, weil große Teile der Konstruktion nicht mehr aus Holz, sondern aus Stein gefertigt werden. Während bei den frühen Tempeln nicht mehr als 500 kg zu bewegen waren, müssen im 6. Jahrhundert bis zu 40 Tonnen transportiert werden.[156] Schon unter dem Gewicht einzelner Säulentrommeln drohen die Achsen herkömmlicher Wagen zu brechen oder die Wagen im Sumpf zu versinken. Chersiphron und Metagenes haben eine einfache Vorrichtung entworfen, die die Säulenstümpfe zumindest in der Ebene mühelos transportiert. Sie ummanteln die Säulentrommeln mit Holz, verbinden zwei Trommeln mit einer Achse und nutzen sie als Wagenrad. Die Achse, die von Stieren gezogen wird, bleibt weitestgehend unbelastet. Die Ringe von Anaximanders Universum sind Wagenräder und Hohlzylinder. Es bleibt noch zu zeigen, wie sehr das Wagenrad der Säulentrommel der Mechanik des Himmelsmodells entspricht.

Doch hier soll kurz der Blick auf die Fixsterne fallen, die an gleicher Stelle erwähnt werden, aber ohne jede Größenangabe eingeführt werden. Auch sie haben die Form eines »Wagenrads« und Hohlzylinders. Die Fixsterne haben den kleinsten Abstand zur Erde. Aber in welchem Verhältnis stehen sie zum Durchmesser der Erde? Wenn man die Durchmesser von Sonn- und Mondring, 18 und 27, als Glieder einer arithmetischen Reihe liest, so beträgt ihre

III II I

der Ausblaslöcher, jene Öffnungen, aus denen bei Anaximander die Sonnenstrahlen entweichen, wird nichts ausgesagt, wenn Anaximanders Werte eine Grundrisszeichnung beschreiben.

155 Zum Wagenrad vgl. Aetius II, 20,1. DK 12 B 4. Zit n. Kirk 1994: 148.

156 Vgl. J. James Coulton 1977: 45.

gemeinsame Differenz 9. Für den Durchmesser oder Radius der Fixsterne ergibt sich somit der Wert 9.[157] Folgende Zahlenwerte tragen die Quellen zusammen:

Erde	3
Fixsterne	9
Mond	18
Sonne	27

Fig. 9 – Die Maßzahlen von Anaximanders Planiversum

Betrachtet man die Maße der Hohlzylinder, so ergibt sich eine arithmetische Reihe mit drei Gliedern:

$$s_3 = 9 + 18 + 27 \tag{1.1}$$

Der größte gemeinsame Teiler ist 9. Setzt man die Glieder in die Summenformel [1.2] ein, so ist der Durchmesser der Erde das Grundmaß, die Differenz Δ:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 3(1 + 2 + 3) \tag{1.2}$$

Auch hier bildet Anaximander mit den Faktoren die Reihe der natürlichen Zahlen nach. Auf der Ebene der Rechensteine entstehen aus der Summe der natürlichen Zahlen wiederum Dreieckszahlen.

Ringdurchmesser	Faktor	Psephoi für die Faktoren
Fixsterne	$1 \cdot 3 \cdot 3$	●
Mond	$2 \cdot 3 \cdot 3$	● ●
Sonne	$3 \cdot 3 \cdot 3$	● ● ●

Fig. 10 – Anaximanders Welt auf dem Rechenbrett

Schreibt man die Zahlenwerte mit akrophonischen Zeichen, erhält man wegen der Fünferbündelung kein prägnantes Bild. Die Fünferbündelung war jedoch zu Anaximanders Zeit weitgehend unbekannt. Wenn man die Bündelung fortlässt, statt Γ also IIIII schreibt, dann ergibt sich derselbe einfache Ausdruck für die Summenformel auf dem Rechenbrett wie auf dem Boden des Artemistempels in Ephesos. Die Summe der Faktoren ergibt 6. Die Summe steht also im Verhältnis von 1:2 zum Erddurchmesser.

Erde	3
Fixsterne	10
Mond	19
Sonne	28

III II I

[157] Hier scheint eine Textlücke vorzuliegen. S. Kirk 1994: 148, DK 12A18,

Fig. 11– Eine Schattenreihe: Die Außenmaße des Planiversum

Zum Dipteros II, der um 530 von Rhoikos erbaut worden ist, führt noch eine weitere Spur, die zunächst wie ein Widerspruch anmutet. Er lässt sich allerdings bei näherer Betrachtung leicht beseitigen. Bei Aetius findet sich für den Sonnendurchmesser die Zahl 28, für den Monddurchmesser die Zahl 19.[158] Durchaus wahrscheinlich ist die Vermutung von Hahn: Die Differenz von *n*+1 ist der Breite des Reihe eine zweite heran [vgl. Fig. 11]. Sie enthält die Glieder 10, 19 und 28. Ihre Zahlen messen jeweils den äußeren Durchmesser der Ringe. Die Summe ihrer Glieder mit dem Grundmaß 3 ergeben 60. 60 Fuß aber sind die Säulen des Heratempels hoch. Die Welt Anaximanders folgt den Proportionen der Säule. So entsteht im 6. Jahrhundert die Welt Anaximanders direkt vor seiner Tür. Ihr *modulus* ist die unterste Säulentrommel des Heratempels. Ihre Erstre-

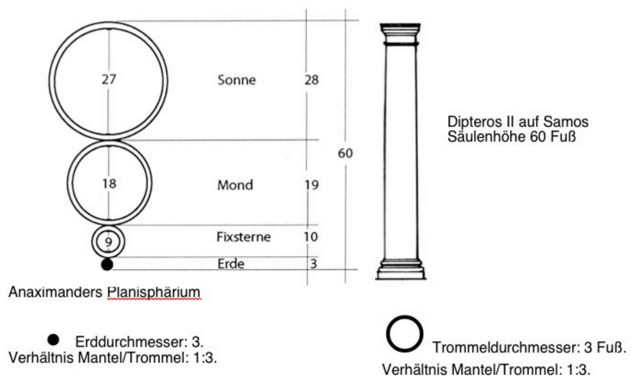


Fig. 12– Anaximanders Proportionen und die Säulentrommeln des Dipteros II auf Samos (G. M.)

ckung gibt die Säulenhöhe des Heratempels vor [Fig. 12]. Abschließend bleibt nur noch zu zeigen, wie die Säulentrommel auf die Bildflächen der Geometrie übertragen wird.

III II I

[158] Aetius II, 20,1. Zit n. Geoffrey Kirk u. a. 1994: 147.

Von der Säulentrommel zu einer rudimentären Geometrie des Kreises

achdem die Proportionen überwiegend auf die figurierten Zahlen verweisen, soll abschließend auf die Geometrie der Säulentrommel eingegangen werden, die ebenfalls der Dreizahl folgt. Hier ist die Verbindung zur Architektur noch offensichtlicher. Eine Frage bleibt noch zu klären. Wer wacht über die Proportionen der Säulenstümpfe, was garantiert, dass sie passgenau aufeinander gestapelt sind? Zwei Techniken bringt Theodorus aus Ägypten mit, die die plane und lotgerechte Verbindung von Steinen garantieren soll: das Anathyrosisband und das Empolion. Sie gruppieren sich um die Gerade und den rechten Winkel. Anathyrosis steht ursprünglich für eine Technik, die zunächst zwischen den vertikalen Fugen einer Steinmauer angewendet wird.[159] Denn jede Fuge droht der Statik der Mauer den Garaus zu machen. Sie ist ein Rundungsfehler in der Symmetrie der Steinreihen. Je höher die Mauer gezogen wird, desto fataler wirkt er sich aus. Die neue Technik minimiert die Fugen. Die Steine werden an ihren Rändern geschliffen und eingeebnet. Die Mitte wird mit dem Meißel konkav ausgehöhlt. So berühren die Säulentrommeln nur am Rand einander.

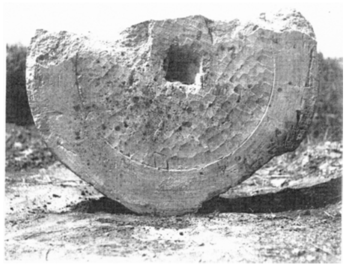


Fig. 13 – Anathyrosisband und Empolion auf einer Säulentrommel des 2. Heratempels auf Samos.

Das Anathyrosisband, das jeden Stein wie ein Türrahmen umgibt, garantiert auf diese Weise, dass die Steine ihren Ort in der Reihe finden. Dieses Band übernimmt in der Tat die Funktion einer Tür. Es wacht über die Abzählbarkeit der Proportionen. Sie dürfen den Raum der ganzen Zahlen nicht verlassen. Diese Technik wird schon in Ägypten auf die Säulentrommeln übertragen. Das Anathyrosisband der Trommeln ist nicht einfach herzustellen. Es reagiert selbst sehr empfindlich auf Rundungsfehler. Die neue Technik erfordert eigene Instrumente. So mag es wenig verwundern, dass Theodoros die Erfindungen der Wasserwaage (*libella*), des Winkelmaßes (*norma*) und der Drehbank (*tornus*) zugeschrieben werden – sie haben seine Arbeit an den Säulentrommeln erleichtert.[160]

I I I I I I

[159] Vgl. J. James Coulton 1977: 46-48.
[160] »normam antem et libellam et tornum et clavem Theodorus Samius [invenit]«. (Plinius n. h. VII 198). Für die Anfertigung der Säulentrommeln aus sehr weichem samischen Süßwasserkalk wurde tatsächlich eine Drehbank verwendet. Vgl. Oscar Reuther 1957: 23; Nils Heffner 2001: I 155-158.

Anfänge sind selten präzise – sie tauchen nicht im Singular auf. Dennoch zeigen sie im Fall der Säulentrommeln, dass mit ihr auch eine rudimentäre Geometrie des Kreises eingeübt werden muss. Der Säulenstumpf soll eine präzise Rundung aufweisen, der Mittelpunkt der Schnittfläche der Säulentrommeln gefunden werden. »Zu einem gegebenen Kreis den Mittelpunkt finden«, so lautet die erste Aufgabe des dritten Buchs der *Elemente.*[161] Das dritte Buch führt in die Geometrie des Kreises ein. Es ist damit auch das Buch der Säulenstümpfe, das von der Statik der Tempel und der Mechanik des Himmels handelt. Auf die Widrigkeiten der Baupraxis scheint Euklid mit vielen indirekten Beweise zu reagieren. Der Lehrsatz III 6 kann direkt den Fehlern der Steinmetze entsprungen sein: »Wenn zwei Kreise einander berühren, können sie nicht denselben Mittelpunkt haben«[Fig. 14]. Schon hier zeigt sich, dass die Geometrie des Zylinders vollständig in der Planimetrie aufgeht, solange die Schnittstellen lotgerecht oder parallel zur Achse verlaufen. Denn Kreise und Rechtecke sind die kleinsten Elemente des Zylinders. Auf der Seite der Säulenstümpfe sorgt das Empolion dafür, dass sie fest und achsengetreu aufeinander ruhen. Ist das Anathyrosisband gesetzt und der Mittelpunkt des Säulenstumpfes gefunden, werden um diesen noch zwei weitere Kreise geschlagen. Die Bedeutung von III 6 für die Praxis ist also nicht zu unterschätzen, auch wenn die Idealität der deduktiven Geometrie, der sich Euklid verpflichtet fühlt, jeden Verweis auf den Tempelbau und die Missgriffe der Steinmetze verbietet. Für die lotgerechte Verbindung der Säulentrommeln hebt der Steinmetz den Mittelpunkt quadratisch oder rund aus. Er setzt in die Mitte das Empolion, eine Achsverbindung, die in der Regel aus einer Holzfassung und einem metallenen Stift besteht. Die Vorrichtung sorgt für die passgenaue und dauerhafte Verbindung zwischen den Säulentrommeln. Abbildung 13 zeigt eine untere Säulentrommel vom 2. Heratempel auf Samos, auf der *empolion* und *anathyrosis* gut zu erkennen sind. Die Trommel ist das Grundmaß der Säulen auf Samos, die Anaximander als Vorbild gedient haben können. Die präparierte Trommel ist das Vorbild seines Himmelsmodells, wie die Gegenüberstellung von Hahn sichtbar macht.

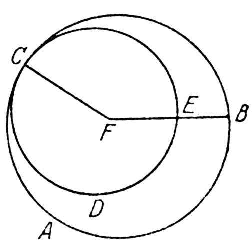


Fig. 14 – Euklid, III 6.

III II I

[161] Euklid, Elemente, III 1.

Die Wagenräder des Chersiphron und die Reißlinien auf den Schnittflächen der Säulentrommeln sind nicht nur das Modell für Anaximanders Universum. Sie sind auch das Modell für die erste griechische Weltkarte, die ebenso Anaximander zugeschrieben wird. Sie skizziert die Umrisslinien der bewohnten Welt. Auch sie trägt die Form einer Säulentrommel. Man kann sich deshalb vorstellen, dass ihre Karte direkt auf die Schnittflächen einer Säulentrommel gezeichnet ist [Fig. 15].[162] Eine kreisförmige babylonische Karte könnte Anaximander als Vorbild gedient haben [Fig. 16]. Die Karte zeigt einen kreisrunden Fluss, der die Grenze der Bewohnten Welt darstellt. Sie zeigt den Euphrat. Sie zeigt Babylon. Doch der markanteste Punkt der Karte ist der Mittelpunkt. Er weist eine Vertiefung auf, die vielleicht von einem Zirkel herrührt. Er mag die Kreise gezogen haben, die die bewohnte von der unbewohnten Welt trennt. Doch im Gegensatz zu Anaximanders Zylinder ist die babylonische Karte eine symbolische Karte. Aber weder Anaximanders Zylinder noch die babylonische Karte entkommen dem Spott Herodots:

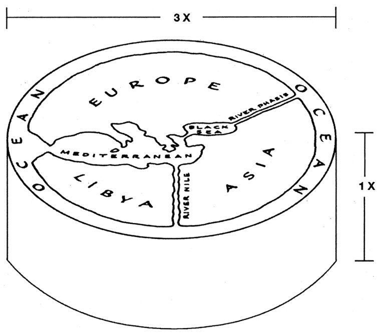


Fig. 15 – Anaximanders Karte der Bekannten Welt.

> Ich muß lachen, wenn ich so manche Leute Erdkarten zeichnen sehe, die doch die Gestalt der Erde gar nicht richtig zu erklären wissen. Sie zeichnen den Okeanos rund um die Erde herumfließend und so regelmäßig wie einen Kreis.[163]

Auch wenn sich genauso wenig mit dieser Karte navigieren lässt wie mit ihren Vorgängern, so ist sie doch mehr Diagramm als Karte. Wie das Universum folgt sie einer Geometrie vom Kreis: den Proportionen der präparierten Säulentrommeln. Was immer den Mittelpunkt dieser sonderbar flachen Erde bezeichnen mag – das Orakel von Delphi oder Milet – auch die Erdkarte Anaximanders weist eine Dreiteilung auf. Schon bei Anaximander ist die Vorliebe für Überträge zu erahnen, die bei Archimedes die Namen für einen unendlich großen Zahlenraum bereithält. Das flache Universum von Anaximander und die kreisrunde Karte entstehen auf der Schreibfläche.

Die Karte zeichnete vermutlich der Schatten eines Gnomon.[164] Gnomon und Schreibfläche stehen am Anfang einer Planimetrie, aus der nicht nur spätestens

III II I

[162] Robert Hahn 2001: 210.
[163] Herodot IV 36.
[164] Vgl. die Überlegungen von Couprie 2003: 194 f. Der Gnomon wird dort im Mittelpunkt der Erdscheibe aufgestellt und bestimmt durch Äquator und Wendekreise die Geometrie des Kreises.

um 440 das beschriftete Diagramm der Geometrie hervorgehen wird, sondern auch die Axiomatisierung des Wissens. Das Universum der Säulentrommeln übt den Umgang mit Zeigern auf Bildflächen ein. So mag es nicht verwundern, dass der Gnomon, der Selbstschreiber der Sonne, für Anaximander zum entscheidenden Werkzeug wird. Im folgenden Kapitel gilt es also zu zeigen, wie ein astronomisches Instrument, ein Zeiger und Schreibgerät im ursprünglichsten Sinne, die Rechen- und Bildflächen der Mathematik erzeugt.

Fig. 16 – Babylonische Weltkarte aus Abu Habba, Ton, 6. Jh. v. Chr., © The Trustees of the British Museum, AN404485001.

III II I

Das Verfahren ist nirgendwo genannt und kann nur sehr indirekt aus den Quellen geschlossen werden.

ÜBER EINE GERADE LINIE

Die Frage, welchen Gnomon nun Anaximander benutzt habe, hat gezeigt, wie sehr die Praktiken des Tempelbaus und der Astronomie auf die Fläche setzen. Es wurde sichtbar, wie die Geometrie als Wissenschaft von den Bild- und Schreibflächen aus einem einfachen Riss entsteht. Nachdem die vorhergehenden Seiten sich dem Gnomon über die Fläche genähert haben, beschäftigt sich der folgende Teil mit den Praktiken des Gnomons. Er lässt der anfänglichen Frage nach der Gestalt des Gnomons eine Antwort folgen.

Buchstäblich Welten trennen Anaximander von Ptolemäus und Vitruv. Auch Diogenes scheint die Kugelgestalt der Erde aus einer späteren Zeit auf Anaximander zu übertragen. Ein Planetarium wie Archimedes es möglicherweise gebaut hat, ist für Anaximander nicht anschlussfähig. Sein Modell basiert auf den Zylindern, den Trommeln der Säulen. Was folgt daraus? Es ist sehr unwahrscheinlich, dass Anaximander eine Halbkugel benutzt hat. Denn die Kugelgestalt liegt seiner Welt fern. Wenn die Welt eine Scheibe ist und auch die Sonne, der Mond und die Sterne als Hohlzylinder um die ruhende Erde kreisen, liegt es viel näher einen Gnomon zu verwenden, der auf einer ebenen Fläche installiert ist. Denn auch wenn die Wagenräder nicht parallel zur Erdscheibe kreisen, sondern eine gewisse Schiefe aufweisen, so erscheinen sie dennoch als Geraden, die die Ebene der Erdscheibe in einem bestimmbaren Winkel schneiden. Denn die Neigung der Ringe gegen die Erdscheibe kann man – wie schon die Babylonier – mit den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks bestimmen. Das, was später als Satz des Pythagoras in die Mathematikgeschichte eingegangen ist, entspringt bei den Griechen um 550 zum zweiten Mal einer Anwendung: Er verweist auf die Astronomie eines zylinderförmigen Universums.

Anaximander muss den Gnomon nicht rektifizieren. Sein Universum ist um eine Dimension geradliniger als das Kugeluniversum. So ist es der ebenen Fläche näher als die Sphärik von Ptolemäus. Und dies weniger, weil sich Zylinder durch einen Schnitt auf eine gerade Ebene entfalten lassen. Diese Welt muss sich nicht mit den Sandkörnern von Archimedes herumschlagen. Exhaustion und Approximation sind ihr fremd. Anaximander kann seine Weltkarte ohne jede Projektion und Verzerrung direkt auf einen Säulenstumpf zeichnen. Der Säulenstumpf und die erste Weltkarte ist paradoxerweise ein frühes Beispiel für ein Wissen, das sich nicht mehr an der Sonne und den Sternen orientiert, sondern aus dem rechten Winkel eine Welt nach ihren eigenen Gesetzen entstehen lässt.

Über den Feind der Planimetrie: Die derangierte Linie

Wie wird nun die Tagundnachtgleiche mit dem Gnomon angezeigt? Die Beobachtung der Sonnenwenden ist alt. Sie wird schon den Babyloniern zugeschrieben. Aber vermutlich lässt sie sich noch weiter zurückverfolgen. Im Sommer wächst der Schatten des Stabes, im Winter schwindet er. Es gibt zwei markante Punkte – die Sonnenwenden. Es sind die Punkte des Umschlags. Sie lassen sich einfach bestimmen, wenn man eine Skala auf dem Meridian des Gnomons, auf die Nord-Südachse, aufträgt. Die Schattenlinie, die der Gnomon binnen eines Tages auf den Boden zeichnet, ist dagegen – wie schon erwähnt – eine Hyperbel: Eine Linie, die bis in das 4. Jahrhundert sich gegen jede Geometrie und Berechnung sträubt. Im 6. Jahrhundert ist die Hyperbel eine derangierte Linie, ihre Krümmung ein rätselhaftes Ereignis. Diese unberechenbare Linie stört die Geometrie des Kreises. Ihre Karriere beginnt erst mit den Beweisen zur Würfelverdopplung. Menaichmos, ein Schüler von Eudoxos und der Entdecker der Kegelschnitte, ist der erste, der um 350 v. Chr. im Anschluss an Hippokrates die zwei mittleren Proportionalen über einen Schnittpunkt zwischen Parabel und Hyperbel konstruiert.[165] Zwar kann der rechtwinklige Kegel durchaus seit Oinopides die Astronomie des Gnomon bestimmt haben, wie Neugebauer vermutet.[166] Er ist jedoch nur dann ein Modell für den Gnomon, wenn man verläßlich von der Kugelgestalt der Erde und des Himmels ausgehen kann. Die Zylinder Anaximanders erzeugen dagegen eine Parallelwelt. Ausgehend von den Grundrissverfahren des ionischen Tempelbaus findet man in ihnen die Anfänge des mathematischen Diagramms. Mit den Zylindern hat Anaximander eine astronomische und kartographische Ordnung auf die Fläche übertragen. Weder die Ekliptik, noch der Äquator spielen dabei eine Rolle. Achsen und Großkreise sind die Agenten einer kugelförmigen Welt. So mag ein Kegelschnitt nicht so recht in die ebene Fläche passen. Dort ist der Kegelschnitt ein unerwünschter Gast, der nicht nach Hause gehen mag. Zwei Tage im Jahr jedoch weilt er auswärts. Dann glättet sich das Liniengewirr der Hyperbeln und die Spitze des Gnomons zeichnet eine gerade Linie auf den Boden. Das geschieht genau dann,

[165] Die Begriffe »Parabel« und »Hyperbel« fallen nach der Schule des Eudemos in der geometrischen Algebra schon bei den Pythagoreern. Doch erst Apollonius v. Perga überträgt diese Bezeichnungen auf die Kegelschnitte. S. Proklos *Elemente* I 44 und vgl. Heaths Kommentar zu *Elemente* I 44.

[166] Otto Neugebauer 1947: 136-137.

wenn die Bilanz zwischen Tag und Nacht ausgeglichen ist: zur Tagundnachtgleiche. Die Ökonomie der Linie folgt einer einfachen Logik des Übertrags. Am Beispiel des Gnonom kann man gut verfolgen, dass zwischen Übertrag und Buchhaltung eine Verwandtschaft besteht, auf die sich die geometrische Algebra beziehen wird.

Der Gnomon als Lot und Winkelmaß

Die vorhergehenden Kapitel haben Anaximander den Verdienst zugeschrieben, den Himmel und die Erde auf die ebene Fläche gefällt zu haben. Anaximandr steht damit für das neue Wissen, das sich an der ebenen Fläche ausrichtet. Es ist die Planimetrie. Im diesem Kapitel soll genauer erörtert werden, wie der Schattenstab die Planimetrie begründet. Welchen Platz nimmt er in der neuen beweisenden Wissenschaft ein? Eine Antwort liefert das Lot und das Winkelmaß und ein erster induktiver Beweis zum Satz des Pythagoras. Er macht den Gnomon zum mechanischen Gerät mathematischer Erkenntnis.

Dabei ist entscheidend, dass der Gnomon nicht nur ein Schattenstab ist. Er ist auch eine Hilfskonstruktion für Sonnenuhren.[167] Sie sind selten exakt. Sie werfen nur einen scharfen Schatten, wenn die Sonne hoch am Himmel steht. Steht sie tief, so droht Halbschatten und Unschärfe in der Zeitmessung. Das Streulicht unterbricht den Lauf der Sonnenuhren. Das kann auch nicht durch die Größe des Stabs ausgeglichen werden. Je höher der Stab ist, desto ungenauer wird der Schatten, den die Spitze auf den Boden wirft. Darum sind auch Säulen und Obelisken als Schattenstab vollkommen ungeeignet. Bei tiefem Sonnenstand schafft dagegen ein Gerät Abhilfe, das die Griechen ebenfalls Gnomon nennen. Es ist ein bewegliches Winkelmaß, das den ersten Gnomon als Achse nutzt und im rechten Winkel ergänzt. Ist der kleine Gnomon nach den Sonnenstrahlen ausgerichtet, fängt er selbst den Schatten des Streulichts ein. Michel Serres erwähnt nur den Schattenstab, den großen Gnomon. Aber weniger der große Gnomon als seine Hilfskonstruktion begründet das neue Wissen der Planimetrie. Über ihn erfinden die Griechen die »automatischen Erkenntnis«.[168] Man kann mit gutem Grund bezweifeln, ob der Gnomon eine Maschine ist und ob er am Anfang einer langen Geschichte des Algorithmus' steht. Doch zweifellos ist der Gnomon ein Instrument, das Wissen mechanisch herstellt. So bleiben Fragen: Wie wird dieses

III II I

[167] Vgl. Dieter Lelgemann 2001: 25 f.
[168] Michel Serres 1994: 122.

Hilfsgerät mit diesen universalen Eigenschaften aufgeladen? Wie wird der Gnomon zu einem Instrument des Wissens?

Die Spitze des Gnomons ist die Quelle der einfachsten geometrischen Objekte. Punkt, Kreis, Linie, Diagonale und Winkel gehen von ihr aus. Doch nicht nur die Beschränkung auf Zirkel und Lineal, auch die klassischen mathematischen Probleme nehmen vom Gnomon ihren Ausgang. Aufgaben wie die Quadratur des Kreises, die Verdopplung des Quadrates oder das Delische Problem der Würfelverdopplung verweisen noch immer auf die Materialität der Sonnenuhr. Die Karriere, die der Gnomon jenseits der Astronomie in Arithmetik und Geometrie vollzieht, geht von dieser Grundanordnung von Kreis und Quadrat, von Sonnenstab und Gnomon aus. Selbst die Trigonometrie, die irrationalen Zahlen und die Proportionslehre schreiben sich in die »Gegenseite«, die Diagonalen der Vierecke ein. Sie gründen auf der Architektur des Gnomons. Wie sehr der Gnomon die Schreib- und Bildflächen prägt, mag hier am Fluchtpunkt des ersten Buchs der *Elemente*, am Satz des Pythagoras, gezeigt werden. Er besteht aus nicht viel mehr als aus einem Winkelmaß und einer »Gegenseite«: Elemente, die direkt aus der Geometrie des Schattenstabs ausgelesen worden sind.

Zunächst im rechten Winkel zum Himmel zeigend, wirft der Gnomon als Winkelmaß seinen Schatten auf die frühe pythagoreische Arithmetik und Geometrie. Schon Oinopides verpflichtet im 5. Jahrhundert die Konstruktionen der Geometrie auf Lineal und Zirkel. Ein Schüler von ihm, Zenodot, führt die Unterscheidung zwischen Aufgaben (*problemata*) und Lehrsätzen (*theoremata*) ein.[169] Beide Neuerungen, die Unterscheidung und die Beschränkung auf Zirkel und Lineal, sind für die Axiomatik zentral.[170] Ihre Binarität erzeugt Hierarchien: Sie trennt »Prinzipien« von »Folgerungen«. Oinopides hat mit dem Schattenstab zu gleichen Teilen in der Geometrie und Astronomie Geschichte geschrieben. Er hat ihm die Äquinoktien, die Schiefe der Ekliptik, die Wendekreise und den Äquator entlockt. Mit seinen Berechnungen zur Schiefe der Ekliptik und der Länge des synodischen Monats, die er mit 21557 : 730 bis auf die 4. Dezimalstelle genau fasst, verbindet er die praktischen Berechnungen der Astronomie mit den axiomatischen Konstruktionen der Geometrie. Er ist zwar nach Anaximander nicht der erste, der das Lot des Sonnenstabes auf die Fläche fällt. Doch bei ihm

III II I

[169] Proklos Vorrede II. Teil (222).
[170] Heath schließt das aus den einfachen Konstruktionen von I 12 und I 23. (1921: I 175-76).

erhält der Gnomon seinen ersten Auftritt in einem geometrischen Beweisverfahren. Euklid kann das bezeugen:

> Auf eine gegebene unbegrenzte Gerade ist von einem gegebenen Punkte, der nicht auf ihr liegt, das Lot zu fällen.

Diese Proposition, I 12, wird Oinopides zugeschrieben. Die senkrechte Linie heißt *kathetos*.[171] Die Kathete verweist auf ein Verb. »Herunterlassen«, »hinabwerfen« und »sinken lassen« sind Operationen, die man mit der Kathete verbindet.[172] Das Substantiv verweist auf de Umgang mit einem Lot oder Senkblei. Ein Lot wirft man herab, lässt es sinken oder herunter. Die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks sind also als Linien zu denken, die ein Senkblei erzeugt. Proklos merkt an, dass es zwei Katheten gibt: die »Plan-« und die »Raumkathete«. Im ersten Fall liegen Punkt und Gerade in derselben Ebene. Sie lassen sich also im Zweidimensionalen darstellen: Ein Punkt wird auf eine Gerade gefällt. Im Fall der Raumkathete liegt der Punkt außerhalb der Ebene. Er lässt sich von diesem Punkt nicht mehr auf eine Gerade fällen, sondern wird aus einer dritten Dimension auf eine Ebene gefällt. Euklid verwendet die Plankathete: ein Lot soll auf eine Gerade gefällt werden.[173] Der Euklidische Satz, der über seine Verwendung schweigt, kann deshalb mit dieser Unterscheidung leicht geerdet werden:

> Dieses Problem machte zuerst Oinopides zum Gegenstand seiner Forschung, da er es für die Astronomie für nützlich hielt. Er nennt die Senkrechte in altertümlicher Weise nach dem Gnomon [katå gn≈mona], weil auch der Gnomon mit dem Horizont rechte Winkel bildet.[174]

Euklids Aufgabe I 12 ist also eine Gebrauchsanweisung für die Errichtung eines Gnomons. Das Theorem des Pythagoras ist untrennbar mit dieser Operation verbunden. Aber das Theorem braucht nicht mehr die Strahlen der Sonne. Die Pythagroeer haben den Gnomon bereits in der Musiktheorie als Instrument der Fläche studieren können.

Und dennoch kann der Gnomon seinen Schatten nur auf die Euklidische Geometrie werfen, weil er zuvor den Raum der Zahlen durchschritten hat. Im Zentrum steht eine prominente Eigenschaft des Gnomons: der Mechanisierung von Operationen. Die Arithmetik der Rechensteine macht von ihr erheblichen Gebrauch. Das Wort Gnomon haben die Griechen von einem Verb abgeleitet. Der »Gnomon« bezeichnet den »Wahrnehmenden«, »Bestimmenden« und »Urteilenden«. Die Operation wird keinem Subjekt zugeschrieben. Der Gnomon

III II I

[171] Vgl. den Kommentar v. Thomas Heath zu I 12
[172] Vgl. Benseler 1994: 391 [Substantiv]; 392 [Verb].
[173] Vgl. Proklos zu I 12.
[174] Proklos I 12.

ist weniger Beobachtungsinstrument. Er ist vollständig auf die Kommunikation zwischen den Dingen ausgerichtet. Für Serres steht der Gnomon deshalb für eine »Astronomie ohne Augen«: Er bezeichnet den blinden Blick der Maschine.[175] Vitruv scheint genau diese automatische Erkenntnis im Sinn gehabt zu haben. Er bezeichnet den Gnomon als »Aufspürer des Schattens«[176]. Diesen blinden Blick macht sich die Arithmetik zunutze. Blindheit steht am Anfang einer Mathematik, die keine Aussage ohne einen Beweis gelten lässt. Blinder Anfang, ohne jedes Subjekt – das ist es, was die Kommunikation zwischen Punkt und Linie, zwischen den Lehrsätzen und den Aufgaben in Gang setzt. Ist ein Axiom, das gilt, weil es selbstevident ist, nicht selbst ein blinder Anfang? Wohnt nicht jeder Axiomatik ein Schattenfänger inne? Am Anfang der beweisenden Mathematik steht ein Schattenfänger, der Aussagen verallgemeinert. Euklids *Elemente* tragen deutliche Spuren der blinden Mechanik. Beredt ist schon allein ihr Name Denn *stoicheion* bezeichnet mit dem »Prinzip« und »Buchstaben« zugleich auch einen Stift – den Schattenstab der Sonnenuhr.[177] Ein Blick auf den Fluchtpunkt des ersten Buches, den Satz des Pythagoras, soll zeigen, wie auf dem Rechenbrett der Gnomon die beweisende Mathematik erstmalig begründet.

Über einen rechten Winkel und eine Diagonale

Von Pythagoras ist kein Theorem überliefert, das die Seitenverhältnisse eines Dreiecks auf ähnlich formale Weise festschreibt und beweist wie Euklid in den *Elementen* (I 47).[178] Trotzdem ist belegt, dass Pythagoras zum ersten Mal die Seitenverhältnisse eines Dreiecks formal anschreibt. Suchen dagegen die Babylonier nach einer Gegenseite im Dreieck, so schreiben sie zumeist die Aufgabe als konkretes Beispiel an:

> Es lehnt ein Schilfrohr gegen eine Mauer: Drei Ellen hoch und drei Ellen von der Wand entfernt. Wie lang ist das Schilfrohr, wie hoch ist die Mauer? Ich kenne ihre Maße nicht.[179]

Nicht das Schilfrohr, die Mauer oder die Ellen machen den Unterschied zur griechischen Mathematik aus. Die Babylonier müssen keine Geschichte erzählen,

III II I

[175] Michel Serres 1994: 122 und 124 (Zitat).
[176] Vitruv I, 6, 6.
[177] Vgl. den Eintrag stoixeion im Gemoll 1979: 689-90. Ebenso Benseler 1994: 729.
[178] Die Autorschaft für das Theorem ist über Proklos, Plutarch, Diogenes Laertius (VIII. 12) und Athenaeus (X. 13) erst spät belegt. Es finden sich keine griechischen Quellen aus dem vorchristlichen 5. Jahrhundert. Vgl. Burkert 1962: 406. Damerow 2001: 225.
[179] Neugebauer 1937: 14-22. Zit. n. Friburg 1981: 307.

um eine Aufgabe zu stellen. Und dennoch ist diese Aufgabe weit davon entfernt, ein geometrisches Problem zu sein. Mit dem Übergang von den Bullen und Tonumschlägen zur zweidimensionalen Tafel, so Schmandt-Besserat, sei die Zahl endgültig zur abstrakten Größe geworden. Denn der Abdruck der ältesten Tokens, der Abdruck von Kegeln und Zylindern, korrespondiere nun nicht mehr mit den Waren, sondern steht für eine Zahl beliebiger Waren.[180] Die Tontafel habe zwischen 3300 und 3100 v. Chr. die Schrift durch numerische Abstraktion hervorgebracht.[181] Vielleicht hat das Konzept der Zahl einen Sprung gemacht, ein neues Niveau der Abstraktion erreicht. Doch Zählen bleibt zu einem gewissen Maß immer noch eine konkrete Operation.[182] Die Zahl erhält ihren Wert nicht von einem abstrakten Konzept, sondern setzt auf Zuordnung. Und auch Zeichen, die Anzahlen bündeln, ändern daran wenig. Es ist auffällig, dass die Mathematik der Zahl häufig eine Lage zuweist. Die Arithmetik kann mit der Zahl nicht formal operieren.[183] Zahlenkonstellationen der Babyloniern sind nicht selten Rechtecke und Quadrate. Rechnen bedeutet zunehmen und verringern und das in einer ganz wörtlichen Hinsicht. Das zeigen die Begriffe, die die arithmetischen Operationen bezeichnen. Häufig verweisen sie auf Flächen, Räumen und Volumina. So heißt der akkadische Begriff für Addieren *kamarum*, »schichten« oder »häufen«, für Subtrahieren zuweilen *harasum*, »abschneiden«, »abtrennen«. Der Terminus für die Multiplikation heißt *nim*. Er ist logographisch mit *elûm* und *saqum* verwandt. Mit diesen Zeichen kehren die Babylonier zum Ziegelstein zurück. Wenn eine Mauer um eine Ziegelsteinreihe erhöht wird, so werden genau dieselben Zeichen verwendet wie bei der Multiplikation.[184]

Während die Pythagoreer die deduktiven Techniken der Geometrie auf die Arithmetik übertragen, betrachten die Babylonier die Geometrie mit den Augen der Arithmetik. Diagramme speichern deshalb auch nicht Konstruktionsschritte, sondern Aufgabenstellungen.[185] Eine arithmetische Frage verlangt nach einer numerischen Antwort. So wird die Frage nach der Diagonale in einem Quadrat mit konkreten Zahlenwerten belegt.[186] In einem anderen Fall liegen Antworten als

III II I

[180] Vgl. Denise Schmandt-Besserat 1992: I 193.
[181] Vgl. Vgl. Denise Schmandt-Besserat 1992: I 194.
[182] Jens Høyrup 1994: 70.
[183] Jens Høyrup 2001: 34.
[184] Jens Høyrup 2001: 19 (Addition), 20 (Subtraktion) und 22-23 (Multiplikation).
[185] Jens Høyrup 2001: 103.
[186] Zu YBC 7289 Neugebauer/Sachs 1945: 42.

Tabelle vor, die verschiedene Lösungen bereithält. Das bekannteste Beispiel ist die Tontafel, die 1923 nach seinem Sammler als *Plimpton 322* in die Archäologie- und Mathematikgeschichte eingeht und auf 1600-1900 v. Chr. datiert wird.[187] Auch wenn 1-2 Kolumnen bei der Ausgrabung verloren gegangen sind,[188] so haben sich dennoch 15 verschiedene Zahlentripel erhalten. Mit ihnen kann jeder Lehrer neue Schilfrohraufgaben für seine Schüler generieren.[189]

Den Tripeln liegen verschiedene Proportionen zugrunde. Trotzdem findet man keinen Algorithmus, mit dem man beliebig viele Dreiecke herstellen kann. Das Medium der babylonischen Mathematik ist die Tabelle. Ein formales Anschreiben der Aufgabe bleibt der griechischen Mathematik vorbehalten. Die Babylonier haben, so schreibt Damerow, nicht nur den Satz des Pythagoras nicht gekannt. Sie haben die Aufgaben dieses Typs gelöst, ohne jemals einen Begriff von Winkel, Parallelität und Ähnlichkeit zu besitzen.[190] Schon die Einteilung der Winkel in stumpf, spitz und rechtwinklig ist ihnen unbekannt.[191] An die Stelle eines Winkelmaßes treten eine schiefe Ebene, ein Höhen- und ein Breitenmaß.[192] In Ägypten wird die kürzere Seite in Handbreiten, die längere in Ellen gemessen. Soll die Steigung einer Böschung gemessen werden, schreibt Neugebauer, so wird angegeben

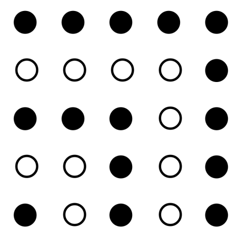


Fig. 17 – Pythagoreische Summenformel (G. M.)

> ...um wie viel Handbreiten die Böschung zurückspringt bei einer vertikalen Höhe von einer Elle.

Ein ähnliches Maß findet man auch in Mesopotamien. Horizontale Größen werden in GAR (=12 Ellen) gemessen.[193]

Die Aufgaben, die dem pythagoreischen Theorem vorangehen, gruppieren sich um das Böschungsmaß. Doch sobald die Böschungen aus dem Blickfeld geraten, scheint der Umgang mit den »geneigten Flächen« eher induktiv zu funktionieren und keiner formalen Logik zu folgen. Während babylonische Schreiber zuweilen

III II I

[187] Neugebauer/Sachs 1945: 39.
[188] Neugebauer/Sachs 1945: 39. Price 1964: 1+10. Friburg (1981: 284).
[189] Zu Plimpton 322 als »teacher's aid« vgl. Friburg 1981: 302.
[190] Damerow 2001: 236-238.
[191] Damerow 2001: 228 (Fußnote 14).
[192] Vgl. Maurice Caveing 1997: 139.
[193] Wenn eine Elle sieben Handbreiten enthält, entspricht das ägyptische Böschungsmaß m ctg a. Zum Neigungsmaß vgl. Otto Neugebauer 1934: I 124; Arpad Szabo 1982: 189 und Szabo 1994: 88-89.

auch nicht-rechtwinklige Dreiecke in den Blick nehmen,[194] grenzen die Pythagoreer den unsteten Blick auf rechtwinklige Dreiecke ein. Das Neigungsmaß wird durch das Winkelmaß, die Böschung durch den Gnomon ersetzt. Böschung und Gnomon stehen dabei nicht nur für unterschiedliche Praktiken. Sie stehen für zwei vollständig getrennte Welten. Doch die Eingrenzung, die der Gnomon als Winkelmaß erzwingt, steht nur am Ende einer langen Kette von Formalisierungen. Die Anfänge dieses abstrakten Wissens findet man in dem mechanischen Umgang mit Rechensteinen und figurierten Zahlen.

Die pythagoreische Beweisführung entsteht aus dem Legen von Winkeln und Rechteckzahlen.[195] Jede Quadratzahl kann um ein Winkelmaß, einen Gnomon, ergänzt werden, ohne dass sich die Seitenverhältnisse ändern [Fig. 17]. Aristoteles, der diese Rechenpraxis den Pythagoreern zuschreibt, notiert dazu:

> ...es gibt manches, das zunimmt ohne verändert zu werden; so nimmt ein Quadrat, wenn man ein Gnomon hinzufügt, zwar zu, aber es ist dadurch nicht verändert.[196]

Aus der Summe der ungeraden Zahlen entsteht deshalb die Reihe der Quadratzahlen. Denn jede quadratische Zahl lässt sich bis zum letzten Stein in eine Summe von Winkelhaken zerlegen. Dass die Summe der Reihe der ungeraden Zahlen eine Quadratzahl ist, diese Einsicht folgt unmittelbar aus den Figuren der Rechensteine. Selbst die unbestimmte Gleichung, die in die Euklidischen Elemente unter I 47 Eingang findet, lässt sich mit den Rechensteinen numerisch lösen. Das was in die Mathematikgeschichte als der Satz des Pythagoras eingegangen ist, aber schon bei den Babyloniern mit Zahlentripel belegt worden ist,[197] gründet auf der Summenformel der ungeraden Zahlen: auf dem Gnomon. Die Pythagoreer brauchten nicht die algebraische Anschreibung:

$$n^2 + m^2 = p^2.$$

Vorausgesetzt *n* ist eine gerade Zahl und *m* eine ungerade Quadratzahl, so lässt sich die Gleichung über den Winkelhaken lösen. Zunächst wird der Winkelhaken gelegt. Dies kann nur mit einer ungeraden Anzahl von Rechensteinen geschehen. Die Eins bleibt außen vor. Denn mit einem einzigen Rechenstein kann man keinen

III II I

[194] Vgl. Neugebauer/Sachs 1945: 42 und Damerows Ausführungen zu YBC 8633 (2001: 244 f).

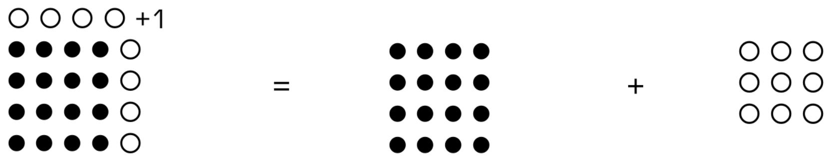
[195] Die Verwendung des Gnomon lässt sich über Philolaos und Aristoteles (Physik III. 4, 203 a 10-15. Kategorien 14, 15 a 30) mehrfach nachweisen. Vgl. zusammenfassend den Kommentar zu I 47 bei Heath 1956: 350-51.

[196] Aristoteles: Kategorien 14, 15 a 30.

[197] Zu *Plimpton 322*: Neugebauer 1963: 529. Van der Waerden 1966: 122 f. Auch die Summe der arithmetischen Reihe findet bei den Babyloniern, auch wenn sie kein formales Verfahren für die Summenbildung angeben können (van der Waerden 124). Friberg 1981: 306. Damerow 2001: 231-232.

Winkelhaken bilden. Da *m* zugleich eine Quadratzahl sein muss, kann das kleinste Winkelmaß erst mit 3^2 Rechensteinen gelegt werden. 3 ist nach Nicomachus auch die kleinste Einheit der Flächenzahlen. Denn jedes reguläre Polygon zerfällt in Dreiecke.[198] 3 ist daneben auch das Einheitswinkelmaß. Denn jede Flächenzahl, die sich in Dreieckszahlen auflösen lässt, kann man auch mit Winkelhaken auslegen.

In einem zweiten Schritt wird das Winkelmaß mit Rechensteinen gefüllt. Der Gnomon gibt das Maß vor. Aus Gnomon und Quadrat ergeben sich die Werte. Die Steine müssen nur noch gezählt werden. Da die Anzahl der Rechensteine, die den Gnomon bilden, eine Quadratzahl bilden, kann der Winkelhaken selbst erneut zu einem Quadrat gelegt werden. Aus dem ehemals großen Quadrat entstehen zwei kleinere Quadrate. Die Steine zeigen es sogleich. Die Bilanz ist geglückt. Kein Stein bleibt übrig. Die Anzahl der Rechensteine bleibt gleich [Fig. 18]. Der Beweis des Pythagoras muss von derselben brachialen visuellen Überzeugungskraft gewesen sein. Der Gnomon ist die Leerform, aus der sich der Beweis entfaltet. Er ist ein Zeiger, der selbsttätig den Beweis vollzieht.



$$p^2 = (n+1)^2 \quad = \quad n^2 \quad + \quad 2n+1$$

Fig. 18 – Ein induktiver Rechensteinbeweis zum Satz des Pythagoras (G. M.)

Die algebraische Anschreibung kann das noch einmal für unsere Augen verdeutlichen. Wenn man zunächst die Seitenlänge *n* des umschlossenen Quadrates anschreibt, kann man die Gesamtanzahl der Rechensteine einfach formalisieren:

Die Schenkellänge des Gnomons *m* ist dann $m = n + 1$. Der überzählige Stein (+1) ist genau der Eckstein des Winkelmaßes [vgl. Fig. 18]. Der Eckstein nimmt in der pythagoreischen Zahlentheorie eine prominente Position ein. So schreibt Nicomachus v. Gerasa:

> Das Gerade zerfällt in zwei gleiche Teile, ohne dass es durch eine Einheit in der Mitte geteilt wird; das Ungerade kann nicht in zwei gleiche Teile fallen. Es benötigt eine Einheit, die es in der Mitte teilt.[199]

Die Einheit ist der Eckstein des gelegten Winkelhakens. Dieser Stein unterscheidet zwischen gerade und ungerade.[200] So konzentriert sich die Lehre

I I I I I I

[198] Nicomachus v. Gerasa Arithemtica: II 7,3.
[199] Nicomachus v. Gerasa Arithmetica: I 7,2.

vom Geraden und Ungeraden auf ihn. Er ist die Einheit der Zahlen. Noch auf der pythagoreischen Tafel, dem Einmaleins, sind die Ecken ausgezeichnet. 1, 10 und 100 garantieren die Einheit in der Vielheit.[201] Und wie ich später zeigen werde, kommt selbst in der geometrischen Algebra, etwa im zweiten Buch der *Elemente*, den Eckflächen der Parallelogramme eine entscheidende Rolle zu. Doch zurück zum Rechensteinbeweis.

Die Anzahl der Rechensteine, die man zum Legen des Winkelhakens benötigt, ist die Summe aus der doppelten Seitenlänge *n* und dem Eckstein, also: $2n+1$.

Die Länge des dritten Quadrates *p* ist identisch mit der Schenkellänge des Gnomon, also $p=m$. Die Anzahl der Rechensteine für das große Quadrat, das Quadrat über der Hypotenuse, kann nun einfach errechnet werden. Sie ergibt sich aus den Rechensteinen des Winkelhakens und des umschlossenen Quadrates:

$$p^2 = n^2 + 2n + 1. \tag{1.1}$$

Oder anders gewendet und doch gleich. Sie ergibt sich aus der Quadratsumme der Schenkellänge des Winkelhakens:

$$p^2 = (n+1)^2. \tag{1.2}$$

Hier wird nicht nur die Verwandtschaft zur Summenformel der ungeraden Zahlen sichtbar [vgl. Fig. 17]. Die algebraisierte Form zeigt noch einmal beide Ausgangsbedingungen: m^2 muss ungerade und eine Quadratzahl sein. Ungerade muss sie sein, damit der Gnomon den Beweis aufzeigen kann. Quadratzahl aber muss sie sein, damit das Zahlentripel im Bereich der ganzen Zahlen liegt. Dies ist der Preis, den Pythagoras für den Rechenstein-Beweis zu zahlen hat. Es ist der Pfand, den er für die Abzählbarkeit zu hinterlegen hat.

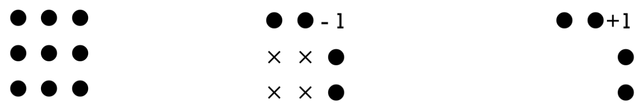
Auch die Routine, die Proklos Pythagoras zuschreibt, beruht auf Abzählbarkeit – auf der Unterscheidung von gerade und ungerade:

> Die pythagoreische [Lösung] geht von den ungeraden Zahlen aus. Sie nimmt nämlich die gegebene ungerade Zahl als die kleinere Kathete an, bildet hiervon das Quadrat, subtrahiert davon 1 von 9 und nimmt die Hälfte des Restbetrags als die größere Kathete: addiert sie aber 1 dazu, so bildet sie die dritte Seite, die Hypotenuse.[202]

Proklos schweigt. Dennoch wird sehr deutlich, dass der Beweis wieder auf der Summenformel der ungeraden Zahlen beruht. Das Medium sind die Rechensteine, nur der Weg zur Hypotenuse führt nunmehr vom Quadrat zum Winkelhaken:

III II I

[200] Nicomachus v. Gerasa Arithmetica: I 7,5.
[201] Vgl. Nicomachus v. Gerasa Arithmetica: I 19,17-19.
[202] Proklos I 47.



1. Schritt: *ungerade Kathete* quadrieren — $a^2 = (2n+1)^2$

2. Schritt: *gerade Kathete* als Gnomon – Eckstein ist nicht gesetzt — $b = \frac{(2n+1)^2 - 1}{2}$

3. Schritt: *Hypotenuse* als Gnomon – Eckstein ist gesetzt — $c = \frac{(2n+1)^2 - 1}{2} + 1$

Fig. 19 – Der induktive Rechensteinbeweis zum Satz des Pythagoras bei Proklos (G. M.)

Die Variationen der Rechensteinbeweise zeigen alle dasselbe: Die Arithmetik des rechtwinkligen Dreiecks ist weniger Rechenkunde. Sie ist vielmehr immer noch »Anzahlenkunde«: die Kunst des richtigen Zählens.[203] In beiden vorgeführten Fällen ist der Rechensteinbeweis induktiv. Er kann die rechtwinkligen Dreiecke nicht mit einer unendlichen Zahl von Tripeln belegen. Burkert betont deshalb, dass induktive Beweise noch nicht die Stringenz der axiomatischen Methode besitzen. Die Lösung der unbestimmten Gleichung über den Gnomon ist nur eine unter vielen.[204] Das Verhältnis der Seiten bleibt abzählbar. Man versuche einmal $\sqrt{2}$ mit Rechensteinen zu legen. Schon allein weil die irrationalen Zahlen weder gerade, noch ungerade sind, diese Unterscheidung aber wesentlich für das Legen der figurierten Zahlen ist, muss dieser Versuch misslingen. »Psephoi-Arithmetik und Irrationalität schließen sich aus«, schreibt Burkert.[205] Und auch Proklos führt stattdessen das Menon-Beispiel an, um auf den Unterschied zwischen Arithmetik und Geometrie hinzuweisen:

> Z. B. können wir in der Geometrie ein Quadrat doppelt so groß als ein anderes finden, in der Arithmetik aber nicht.[206]

Doch wie der Rechensteinbeweis über den Winkelhaken verrät, ist gerade die Verdopplung des Quadrates pythagoreischer Herkunft. Denn wie bei I 47 entsteht die Lösung aus der Halbierung: aus der Kombination von Parallelogrammen (Quadraten) und Dreiecken.[207]

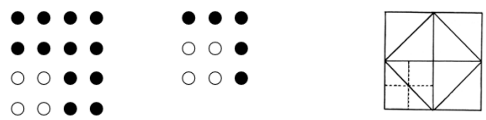


Fig. 20 – die Verdopplung des Quadrats in Platons Menondialog

[203] Vgl. Jacob Klein 1934: 30.
[204] Vgl. Walter Burkert 1962: 410-412.
[205] Vgl. Walter Burkert 1962: 412.
[206] Proklos *Elem.*: 208.
[207] »Parallelogramm« ist bei Euklid der allgemeinere Terminus für Vierecke.

Dem Sklaven Menon legt Sokrates eine Aufgabe vor: Gegeben ist ein Quadrat mit zwei Fuß Länge, gesucht ein Quadrat das doppelt so groß ist. Die Antwort, die der Sklave im ersten Versuch gibt, ist gut pythagoreisch. Sie entstammt der Arithmetik der Rechensteine. Der Sklave verdoppelt jede Seite. Er ergänzt das zweifüßige Quadrat durch zwei Winkelhaken [Fig. 20]. Die Nachzählung ergibt jedoch die vierfache Menge. Beim zweiten Versuch glaubt der Sklave deshalb, dass der einfache Gnomon nun endlich die Verdopplung erzeuge. Er denkt also noch immer in der Logik der Psephoi. Es scheint, als sei der Sklave geradewegs bei den Pythagoreern in die Schule gegangen. Vielleicht hat er dort von der Summenformel der ungeraden Zahlen gehört, und der Lehrer hat ihn in das Anlegen von Flächen mit folgenden oder ähnlichen Worten eingeführt:

> ...es gibt manches, das zunimmt ohne verändert zu werden; so nimmt ein Quadrat, wenn man ein Gnomon hinzufügt, zwar zu, aber es ist dadurch nicht verändert.[208]

Als Sokrates die Verdopplung mit folgenden Worten beschreibt:

> Ich meine ... ein solches [Viereck] nicht etwa, was hier lang ist, dort aber kurz; sondern es soll nach allen Seiten gleich sein, wie dieses hier, aber das zweifache von diesem,[209]

meint er die Lösung zu kennen. Sie schreit nach den Winkelhaken. Nicht eine Wiedererinnerung der Seele führt also den Sklaven zur Lösung, sondern die Aktualisierung des Schulstoffs. Und dennoch ist die Häme von Sokrates groß: Der Sklave glaubt »nicht wissend zu wissen«.[210] Das Wissen von den Zählsteinen und der Gebrauch des Winkelhakens, jenes anschauliche Denken, das nach Sokrates kein Wissen ist, lässt ihn erstarren wie ein »Zitterrochen«. Es stürzt ihn in »Verwirrung«. Das sind die Worte von Sokrates.[211] Denn es zeigt sich nunmehr, dass die Lösung zwischen 1 und 2 liegt. Die Seite des doppelten Quadrates ist also mit dem Vorrat der rationalen Zahlen, nicht zu beschreiben. Auch Proklos erwähnt, dass das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck eine Ausnahme bildet, wenn er sie auch nicht mit der gleichen Dramatik in Szene zu setzen weiß wie Platon.[212] Bei Platon muss der Sklave auf den erlösenden Hinweis von Sokrates warten:

> Von welcher [Seite] also, das versuche doch uns genau zu bestimmen; und wenn du es nicht durch Zählen willst, so zeige uns nur, von welcher.[213]

III II I

[208] Aristoteles: Kategorien 14, 15 a 30. S. oben.
[209] Platon: Menon 83 a.
[210] Platon: Menon 84 c.
[211] Vgl. Platon: Menon 84 b.
[212] Vgl. Proklos I 47.
[213] Platon: Menon 84 a

Die Lösung, die der Sklave gibt, beruht weniger auf Verdopplung als auf Halbierung. Das vierfüßige Quadrat, das der Sklave zunächst gefunden, aber dann durch Sokrates' Geschwätzigkeit wieder aus dem Blick verloren hatte, bildet den Ausgangspunkt. Die Halbierung jedoch wird nicht mehr über den abzählbaren Winkelhaken vorgenommen. Jedes der vier Quadrate, die das vierfüßige Quadrat bilden, wird durch eine Diagonale halbiert [Fig. 12]. Es wird nicht mehr die Seite, sondern der Winkel halbiert. Die Lösung ist geometrisch konstruiert, sie gilt für die Verdopplung aller Quadrate. Denn die Diagonale ist mit Rechensteinen nicht abzählbar und dennoch zeigt sie die Verdopplung.[214]

Sokrates glaubt, dass sich die Seele selbst bei der Lösung von Mathematikaufgaben der Ideen erinnert.[215] Proklos ist ganz Platons Meinung. Er kommentiert, dass die Geometrie »das Auge der Seele reinigt und sie frei macht von den Hindernissen, die von den Sinneswahrnehmungen herrühren«.[216] Aber die Augen der zeigenden Geometrie sind selbst ein wenig getrübt. Denn dieser Beweis baut immer noch auf Sichtbarkeit. Zwar steht der Sklave für eine Zäsur: Das sichtbare Kennzeichen des Übergangs ist die Diagonale. Sie markiert den Übergang von der zählenden Kulturtechnik der Rechensteine zu der Verweistechnik der Geometrie. Aber es bleibt ein schaler Nachgeschmack. Denn auch Menon zählt, nämlich die Anzahl der rechtwinkligen Dreiecke. Deshalb mag man den Worten Sokrates auch wenig trauen. Denn die Lösung funktioniert noch ohne jeden Verweis. Ein Indiz ist das Diagramm, auch wenn es sich nicht auf Platon zurückführen lässt. Das Diagramm kommt ohne Buchstaben aus. Die sokratische Geometrie ist immer noch Anzahlenkunde. Leicht vorstellbar ist es deshalb, dass schon die Pythagoreer die Rechensteine gegen Dreiecke eingetauscht haben, um mit ihnen mannigfaltige Figuren zu legen. Der Irrationalität kann so zunächst mit alten Mitteln begegnet werden: mit figurierten Rechensteinen.

III II I

[214] Platon: Menon 85 b.
[215] Vgl. Platon: Menon 86 b.
[216] Proklos 1945: 182 [Vorrede, I. Teil]

Die »Gegenseite«

Nachdem nun sichtbar wurde, dass die Wiedererinnerung der Seele auf pythagoreische Erziehung beruht, soll hier noch einmal auf die Diagonale eingegangen werden, mit der Platon die Unsterblichkeit der Seele veranschaulicht.[217] Die Bezeichnung »Diagonale« wählt Platon, um die Anfänge zu verdunkeln. Auch die Diagonale, die bei Platon für den Anfang der beweisenden Geometrie steht, entspringt einer pythagoreischen Praxis. Doch das wird erst offenbar, wenn sie ihren platonischen Aliasnamen ablegen kann und aus dem System der Axiomatik herausgelöst wird. Zwar ist das Quadrat einfacher, weil es aus der Multiplikation einer Zahl gebildet wird. Bei Proklos heißt es:

> Das Dreieck, das aus vielen Bestandteilen sich zusammensetzt, bedarf der Konstruktion, das Quadrat hingegen, das aus einer einzigen Seite entsteht, nur der Zeichnung.[218]

Doch das rechtwinklige Dreieck ist beredter, weil es auf die eigentliche Verwendung der Diagonale hinweist. Offenbar führt weder die Böschung noch der Gnomon zur Diagonale. Das platonische Dreieck, das rechtwinklig und gleichschenklig ist, ist von Thales entlehnt. Es ist bei Pythagoras nur ein Sonderfall.[219] Der Satz des Pythagoras hingegen zielt auf die schiefseitigen rechtwinkligen Dreiecke.[220] Nicht das Quadrat, das in der Hierarchie der Axiomatik einen höheren Platz einnimmt, sondern das »Parallelogramm« ist also der Geburtsort der Diagonalen. Im Dreieck teilt sie nicht mehr Winkel, sondern sie tritt als »Gegenseite« auf. Dort trägt sie den Namen *hypotenousa*, die »Untergespannte« oder »Hinuntergespannte«.

Doch was wird hier gespannt und wo hat das »unter« seinen Ort? Max Schmidt hat in einer ausführlichen sprachhistorischen Studie nachgewiesen, dass das Aufziehen der Saite bezeichnet. Der Vergleich mit verwandten Tätigkeiten, z. B. mit dem »Spannen der Bogenseite«, dem »Bespannen eines Sessels« mit Riemen oder dem »Anziehen der Zügel«, zeigt, dass nur das Aufziehen der Saite mit dem Verb *hypotenein* gebildet wird. Die Zuweisung ist also eindeutig. Das Stimmen und Spannen der Saite hingegen ist auch sprachlich vom Aufziehen getrennt. Es wird zumeist durch die Verben *enteinein* oder *epiteinein* bezeichnet.[221]

III II I

[217] Vgl. Platon: Menon 86 a.
[218] Proklos I 46.
[219] Vgl. die Unterscheidung von Proklos I 46.
[220] Für die Gegenüberstellung vgl. Max Schmidt 1916: § 11.
[221] S. Max Schmidt 1916: § 18.

Das Aufziehen der Saite hat man sich ganz bildlich vorzustellen. Das Instrument wurde senkrecht gestellt. Die Saite am unteren Ende befestigt und über den Resonanzraum nach oben gezogen. *Hypoteinein chordén* bezeichnet genau diesen Vorgang.[222] Dieser Ausdruck findet sich auch schon bei Homer.[223] So bleibt nur die Frage, welches Instrument gemeint ist? Welche Saite steht also in einem so engen Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras, dass Pythagoras sie zum allgemeinen Begriff der Gegenseite machen kann? Im Gegensatz zu Lyra und Kithara besitzt nur die Harfe Saiten in verschiedener Länge. Ihr Gestell gleicht einem Dreieck. Die Hypotenuse spannt sich nun zwischen den zwei Armen der Harfe. Die Harfen sind ägyptischer Herkunft, die im 6. Jahrhundert ihren Weg an die kleinasiatische Küste Griechenlands finden. Alkman, der zur Zeit des Thales gelebt hat, ist ihr erster Zeuge. Doch wie kommt Pythagoras an diesen Begriff und welche Umdeutung erfährt er? Auf seinen Reisen oder noch auf Samos, jedenfalls kurz vor seiner Flucht, scheint Pythagoras in Kontakt mit den ägyptischen Harfen gekommen sein. Doch bei ihm sind sie weniger ein Instrument der Musik als der abstrakten Reflexion. Die Saiten der Harfe stehen am Anfang einer Theorie der Parallelen. So können zwei Saiten alle Lehrsätze veranschaulichen, die die Parallelität von Seiten mit der Gleichheit der Wechselwinkel beweisen.[224]

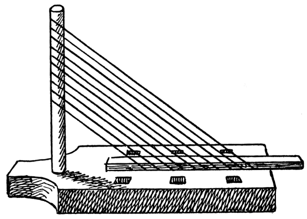


Fig. 22 – Euklid, Elem. I 32 nach Proklos

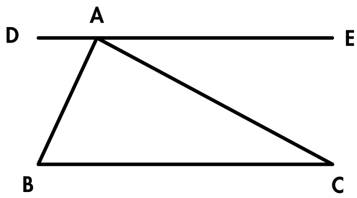


Fig. 21– Dreieckige Harfe (Schmidt 1906).

Einem Lehrsatz, I 32, ist seine Herkunft noch am deutlichsten zu entnehmen. Zwei Saiten zeigen, dass in jedem Dreieck der Außenwinkel den beiden Innenwinkeln gleich ist bzw. dass die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte ist. Auch die Entdeckung dieses Satz schreibt Eudemos den Pythagoreern zu. Die pythagoreische Form des Beweises hat Proklos überliefert[s. Fig. 22]:

> Es sei ABC das Dreieck, und man ziehe durch A die Parallele DE zu BC. Da nun BC und DE parallel, und die Wechselwinkel [vgl. I 23] gleich sind, so ist also Winkel DAB = Winkel ABC, und Winkel EAC= Winkel ACB. Dazu fügt man den gemeinsamen

III II I

[222] Vgl. auch den Eintrag im Wortverzeichnis von Ferdinand Rudio, das er seiner Hippokrates-Ausgabe angehängt hat (Rudio 1907: 178).

[223] Homer Odyssee XXI 407. Max Schmidt 1916: § 17.

[224] Vgl. Euklid: Elemente I 27- I 33.

> Winkel BAC. Die Winkel DAB, BAC und CAE, das sind die Winkel DAB+BAE, das sind die 2 Rechten, sind also gleich den drei Winkeln des Dreiecks ABC.[225]

Man könnte meinen, Proklos vollziehe den Beweis wie eine Buchhaltung. Der Beweis nutzt die Wechselwinkel, um die Innenwinkel der Nebenseiten in Außenwinkel zu wandeln. Nur ein Winkel findet keinen Wechselwinkel: BAC – der Winkel der Gegenseite, der Winkel der Hypotenuse. Über ihn wird die Bilanz vollzogen, indem er zweimal herangezogen wird. Im ersten Fall erzeugt er die Winkelsumme über die zwei Außenwinkel der Nebenseiten. Im zweiten Fall führt er die Bilanz über die korrespondierenden Innenwinkel aus. Aber die eigentliche Dimension des Lehrsatzes erschließt sich erst bei Proklos. Sie liegt nicht nur in der Form des Vollzugs, sondern in ihrem Ergebnis – den zwei rechten Winkeln. Auch die Arithmetik der Winkel beugt sich dem Lot. Denn sie macht den rechten Winkel zur Einheit der Winkelsumme. Der Gnomon wird so zum Winkelmaß der deduktiven Geometrie. Kein einzelner Winkel wird quantifiziert. Abzählbar wird er allein durch die Einheit des Gnomon. Die Winkelsumme eines jeden Dreiecks wird zum Maß für alle regulären Vielecke. Denn jedes Vieleck lässt sich in Dreiecke zerlegen. Proklos stellt auch gleich das Gesetz auf: Ein n-seitiges Polygon lässt sich in $n-2$ Dreiecke zerlegen.[226] Der Gnomon rektifiziert also nicht nur, sondern führt über den rechten Winkel alle Vielecke auf Dreiecke zurück. Die Winkelsumme des Dreiecks aber folgt einer Ökonomie der Fläche. Bei Anaximander folgte die Tagundnachtgleiche den Regeln des Übertrags. Die gerade Linie steht im Gegensatz zu den Hyperbeln für eine ausgeglichene Bilanz. Auch bei der Winkelsumme des Dreiecks ist der Übertrag zwischen Innen- und Außenwinkel von entscheidender Bedeutung. Er sorgt, dafür, dass die Bilanz zwischen den drei Winkeln des Dreiecks immer ausgeglichen bleibt und immer zwei Rechte beträgt. Proklos führt dies an einem beweglichen Dreieck vor, dass aus zwei Schattenstäben gebildet wird:

> Denken wir uns... eine Gerade und an ihren Endpunkten irgendwelche Senkrechte, die sich dann zur Bildung eines Dreiecks zusammenneigen, die Rechten, die sie mit der Geraden bildeten vermindern. Was sie also dort wegnahmen, gewinnen sie durch die Vereinigung in der Spitze wieder dazu, und so bilden sie notwendigerweise die drei Winkel gleich 2 Rechten.[227]

Diese Sätze lesen sich wie eine Einführung zu I 47.[228] Der Satz des Pythagoras braucht weder Sterne noch Böschung. Denn die Kopplung von Parallelogramm

III II I

[225] Proklos I 32.
[226] Proklos I 32.
[227] Proklos I 32.
[228] Vgl. auch Proklos Vorrede zum zweiten Teil der Lehrsätze (413).

und Dreieck wird durch die Harfe ermöglicht. Die Theoreme zur Gleichheit der Wechselwinkel hingegen sind das erste Indiz, dass eine musikalische Technik, das Aufspannen paralleler Saiten, auf die Schreibfläche des Diagramms ausgewandert ist. So wird immer deutlicher, dass die ägyptische Harfe als Vorbild für den Monochord gedient haben muss. Sie ist somit der erste Gegenstand, an dem die Proportionen zum Klingen gebracht, das Verhältnis der Saiten errechnet worden ist. Die Harfe liegt den figurierten Zahlen zugrunde und ist das Inbild der Tetraktys. Die Kopplung von Vierseit und Dreieck geht so auf ein Instrument zurück, das die Pythagoreer meist stumm zum Rechnen verwenden.

Die Lehrsätze zum Wechselwinkel demonstrieren aber auch, dass der Begriff der Hypotenuse, der aufgespannten Saite, nicht schon immer die Gegenseite eines rechten Winkels bezeichnet. Denn I 32 besagt ja gerade, dass die Winkelsumme eines jeden Dreiecks 2 R beträgt. Dies bezeugen auch die Sprachstudien von Schmidt. Bei Archimedes und Eutocius bezeichnet die Hypotenuse die Diagonale eines regelmäßigen Polygons, bei Ptolemäus, Serenus und Eutocios zuweilen auch die Sehne eines Kreises. Anfänglich benennt sie jede Gegenseite. Und selbst Euklid muss in I 47 noch hinzufügen, dass er mit Hypotenuse die Gegenseite des rechten Winkels meint.[229] Die Spuren zur aufgespannten Saite hingegen sind in der *hypothenousa pleura* nur noch zu erahnen. Schon bei Hippokrates von Chios meint die Hypotenuse nur noch die untergespannte Seite des Dreiecks. Die Entfernung der Saite aus dem Bereich der Musik schreibt Schmidt Platon zu und begründet dies mit seiner Abneigung gegen jede Anschauung und Mechanik. Er mag sich dabei auf Plutarch beziehen. Platon, so schreibt Plutarch, waren Archytas und Eudoxos die Feinde der Geometrie, weil sie versucht haben, die Frage nach den mittleren Proportionalen mit den Mitteln der Mechanik zu beantworten.[230] Dass Platon – wie oben dargestellt – der Diagonale und nicht der Hypotenuse den Vorzug gibt und Sokrates anstelle der Pythagoreer zu Geburtshelfern erklärt, zeigt, dass Platon auch notfalls gewillt ist, die Geschichte der Mathematik von jeder Mechanik und Anschaulichkeit zu befreien.

III II I

[229] Vgl. Max Schmidt 1916: § 27 ; weitere Fundorte unter § 26.
[230] Vgl. Plutarch: Marcellus XIV 3.

Die Geometrie der »Gegenseite«

Die Harfensaite markiert einen Bruch, der lautlos ist, aber nicht unsichtbar. Er trennt die induktiven Beweisverfahren der Rechensteine von den deduktiven Beweisen der »Gegenseite«. Der Ort des Übertrags lässt sich nun genau bestimmen. Es ist Samos um 540. Anaximander hat die Konstellation der Sterne mit dem rechten Winkel auf die Schreibfläche übertragen. Er hat den Raum rektifiziert. Doch erst die Saite einer Harfe ermöglicht es Pythagoras nur wenige Jahrzehnte später, das »Unsagbare« zu denken. Die Zäsur ist unübersehbar, die Saite löst die Diskretheit der Säulentrommeln ab. Während bei Anaximander auf den Fundamenten des Tempels das Rechenbrett entsteht, entwickelt Pythagoras am Rechenbrett die Anfänge des deduktiven Wissens. Bei Anaximander ist das Universum ein Vielfaches von 3, bei Pythagoras entsteht es zwischen 1 und 2. Doch während Anaximander ein Universum auf die Schnittfläche einer Säulentrommel zwingt, schlägt Pythagoras im Gedanken eine Saite an, um lautlos das Gesetz der Oktave zwischen 1 und 2 aufzuspannen. Wenn Archimedes schließlich die Unendlichkeit im Sandkorn findet, dann nimmt er die Pythagoras Darmsaite als Richtschnur. Der Sklave Menon zeigt nicht auf eine Linie, sondern auf die Saiten der Harfe. Fragt man also nach den Anfängen der deduktiven Geometrie, einer Wissenschaft, die mit der Technik des Zeigens und Verweisens allgemeine Sätze aufstellt, dann antwortet kein Gnomon, kein Punkt, keine Linie, sondern der errechnete Klang einer Harfensaite.

Nachdem die Saite sich auf der ebenen Fläche als Gegenseite etabliert hat, ändert sich auch der Gnomon. Wie die Null es ermöglicht, Zahlenbewegungen zu protokollieren, besitzt auch die Gegenseite eine Kodierungsmacht, die jedes geometrische Objekt, sei es auch noch so krakelig gezeichnet, zum Stellvertreter seiner Klasse macht. Als die Hypotenuse auf den Flächen der Geometrie aufgetaucht ist, wandeln sich Schattenstab und Horizont zu Nebenseiten, die wie die Hypotenuse einem unendlichen, unabzählbaren Wissen angehören. So findet der Übertrag vom Rechenbrett zum Diagramm einen Protagonisten: die Gegenseite. Zwei Zeugen will ich abschließend noch befragen: Es sind zwei alternative Beweise zum Satz des Pythagoras und zwei Lehrsätze aus dem zweiten Buch der *Elemente*.

Einige Beweise für den Satz des Pythagoras ähneln Platons Lösung bis auf die Diagonale. Sie beruhen jedoch auf dem Gnomon und der Saite, jene Figuren, die Sokrates mit den Pythagoreern aus dem Kanon der neuen Wissenschaft verbannt. Obwohl die Lösung für die gleichschenkligen Dreiecke mit den Elementen desselben Baukastens gelöst werden kann, nämlich mit 8 gleichgroßen, gleichschenkligen Dreiecken, so wird dieser Beweis erst den Indern zugeschrieben. Bei dem Beweis von Hankel und Bretschneider, der sich auf zwei Diagramme stützt, taucht der Gnomon hingegen wieder auf [Fig. 22]. Er umschließt ein Quadrat. Diagonalen teilen den Winkelhaken wiederum in vier rechtwinklige Dreiecke.

Im ersten Diagramm werden die zwei Quadrate der Kathete a^2 und b^2 gebildet. Das zweite Diagramm zeigt wie aus derselben Seitenlänge $a+b$ inwendig das Quadrat der Hypotenuse entsteht. Die Hypotenuse kann hier irrational oder nicht sein, der Knoten wird durchschlagen, indem sie selbst zur Einheit des neuen Quadrates wird. Genauso wenig wie die Hypotenuse verweist der Gnomon des ersten Diagramms auf eine konkrete Anzahl von Rechensteinen. Der Beweis hat für alle Tripel Gültigkeit. Denn er beruht auf dem Verweis.

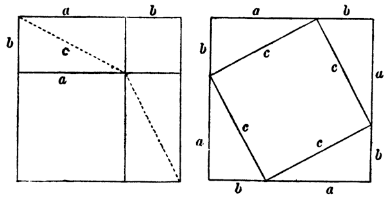


Fig. 22 – Ein deduktiver Rechensteinbeweis für I 47 (Heath)

Die Arithmetik der Fläche

Bis zuletzt lässt sich nicht mit vollständiger Gewissheit nachweisen, welchen Beweis Pythagoras vollzogen hat. Dennoch kann man an anderer Stelle einen geometrischen Gebrauch des Gnomin mit großer Gewissheit den Pythagoreern zuschreiben. Das zweite Buch der *Elemente* trägt die Handschrift der Pythagoreer. Dort wird der Gnomon als Winkelmaß der Vierecke Teil der Geometrie. Die ersten und einzigen zwei Definitionen des zweiten Buchs heißen:

1. Von jedem rechtwinkligen Parallelogramm sagt man, dass es von den beiden den rechten Winkel umfassenden Seiten **umfasst** (das **Rechteck aus** den Seiten) werde.
2. In jedem Parallelogramm soll ein beliebiges der um seine Diagonale liegenden Parallelogramme zusammen mit den beiden Ergänzungen ein **Gnomon** heißen.

Der Gnomon wird im zweiten Buch zum Werkzeug der geometrischen Algebra. Mit ihm kann man quadratische Gleichungen über Quadrate und Rechtecke lösen, die man über eine gegebene Linie errichtet.

Schon zuvor habe ich erwähnt, dass Euklid im zweiten Buch der *Elemente* den Gnomon als Werkzeug der geometrischen Algebra einführt. Das Anlegen von

Flächen wird über die Schule des Eudemos der »pythagoreischen Muse« zugeschrieben.[231] Die Namen der Kegelschnitte, »Parabel«, »Hyperbel« und »Ellipse« tauchen in diesem Zusammenhang zum ersten Mal auf. Eine einfache Flächenanlegung heißt *parabolé*. Ist die Länge der Fläche größer als die Linie, heißt sie *hyperbolé* (= überschüssige Flächenanlegung). Ist sie kleiner, erhält sie den Namen *leipsis* (= mangelnde Flächenanlegung).[232] Mit diesen geometrischen Techniken werden von den Pythagoreern über Diophant bis zu Fibonaccis *Liber quadratorum* Gleichungen angeschrieben und gelöst. Sie rechnen nicht mehr mit Zählsteinen, sondern mit Flächen. Die Arithmetik der Flächen macht aus dem Gnomon ein Werkzeug der deduktiven Geometrie.

Auch wenn das Diagramm ihm seine Form verleiht und er die Algebra mit Zirkel und Lineal mechanisiert, so ist der Gebrauch, den Euklid im zweiten Buch seiner *Elemente* vom Gnomon macht, eher abstrakt. Er verweist auf keinen Zahlenwert. Im Gegensatz zu Anaximanders Universum verhält dieser Gnomon sich vollkommen indifferent gegenüber kommensurablen und inkommensurablen Größen. Er ist eine Hohlform, die nicht nur mit rationalen und irrationalen Zahlenwerte füllbar ist. Eine Kombination aus Linien und Buchstaben ermöglicht es, auf eine allgemeine Klasse von Flächen zu verweisen. Diese Verweistechnik enthebt sie von den Fesseln der Zahl. Das zweite Buch der *Elemente* versammelt geometrische Herleitungen für zahlreiche algebraische Gleichungen. In II 4 und II 6 erhält in leicht abgeänderter Form auch der Satz des Pythagoras in dieser Form sein Reentry [Fig. 23]. Darum soll abschließend kurz auf sie eingegangen werden, aber auch um zu zeigen, wie der Gnomon sich unter dem Einfluss der Gegenseite vom Winkelmaß zum abstrakten Werkzeug der geometrischen Algebra wandelt.

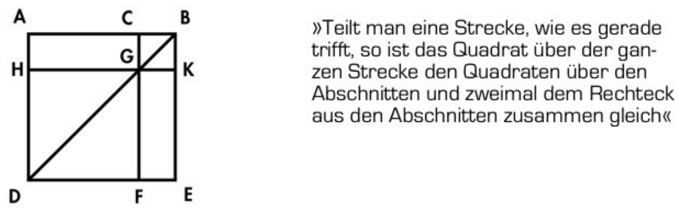
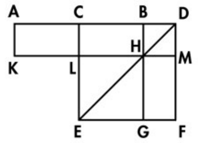


Fig. 23 – Euklid, Elem., II 4.

Bei II 4 entspringt die Lösung demselben Baukasten wie I 32. Dreiecke, Wechselwinkel und die Winkelsumme von 2 R ersetzen das »Sagbare«. Die
I I I I I I

[231] Proklos I 44.
[232] Vgl. Proklos I 44.



»Halbiert man eine Strecke und setzt ihr irgendeine Strecke gerade an, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke mit Verlängerung und der Verlängerung zusammen mit dem Quadrat über der aus der Hälfte und der Verlängerung zusammengesetzten Strecke gleich«

Fig. 24– Euklid, Elem., II 6.

Addition des innenliegenden Quadrates HGDF mit dem Winkelhaken ergibt das größere Quadrat ABDE. Nachdem die Diagonale und die Parallelen gezogen sind, werden die Wechselwinkel in den zwei Quadraten bestimmt, um schließlich mit diesen Linien die Gleichseitigkeit und Rechtwinkligkeit zu beweisen. Ein zweiter Blick gilt den Parallelogrammen, den Schenkeln des Winkelhakens. Über die Quadrate wird ihre Kongruenz bewiesen, um schließlich aus der Summe der zwei Parallelogramme und der Quadrate das allumfassende Quadrat ABDE zu erhalten. Vergleicht man die beiden Diagramme, könnte man zunächst annehmen, dass Euklid in II 6 den Lehrsatz II 4 in leicht abgewandelter Form wiederhole. Doch II 6 ist keine Aufgabe, sondern ein Lehrsatz. Er verspricht also, mehr zu sein. Zunächst fällt auf, dass der Gnomon eine andere Form besitzt. Das Diagramm zeigt ihn in gestreckter und rechtwinkliger Form, so dass I 4 eine einfache Flächenanlegung zeigt, II 6 aber eine Flächenanlegung mit Überschuss ist. Doch nicht nur das unterscheidet die beiden Lehrsätze voneinander. Der Gang des Beweises ist vollständig anders. Zwar werden immer noch Flächen angelegt und eine Diagonale gezogen. Doch der Beweis wird nicht mehr über die Wechselwinkel und die Winkelsumme vollzogen, sondern über die Gnomoi. Die Winkelhaken werden durch Parallelogramme gebildet. Der Beweis fängt bei den Elementen der Winkelhaken an. Zunächst wird die Gleichheit der Parallelogramme bewiesen. Dann erfolgt eine Addition. Bei I 32 war eine Hypotenuse das *tertium comparationis*. Hier ist es ein Parallelogramm und ein Überschuss, eine beliebige Strecke, auf der ein Quadrat angelegt worden ist. Der Überschuss wiederum entspricht bei den figurierten Zahlen dem Eckstein, auch wenn er hier keiner Zahl mehr entspricht. Zusammen mit dem Parallelogramm bildet er nun die Einheit, die die Winkelhaken erzeugen und ihre Gleichheit beweisen soll. Die Parallelogramme, AL und HF, werden also mit dieser Einheit addiert. In einem letzten Schritt wird das innenliegende Quadrat wie bei II 4 mit den entstandenen Winkelhaken addiert. Da die Winkelhaken und das Quadrat auf zweifache Art gebildet werden können, geschieht dies zweimal. Zunächst wird der gestreckte Winkelhaken mit dem Quadrat über der halbierten Seite addiert, dann der rechtwinklige Gnomon mit dem innenliegenden Quadrat. Die ausgewogene Bilanz beweist, dass das große Quadrat sich aus Winkelhaken und inwendigem Quadrat ergibt. Auf einer abstrakten Ebene entspringt der Lehrsatz noch immer dem Baukasten der Pythagoreer, auch wenn er nicht mehr auf Zahlen, sondern Flächen verweist. Zwei Bausteine – ein Vierseit und Quadrate – reichen aus [vgl. Fig. 25-27]:

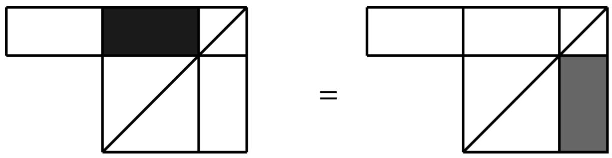


Fig. 25– Die beiden Parallelogramme sind gleich

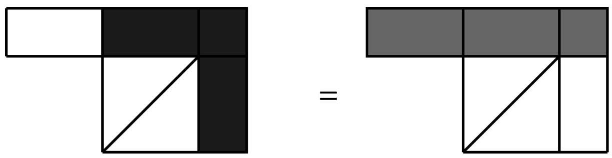


Fig. 26 – »wenn Gleichem gleiches hinzugefügt wird, sind die Grenzen gleich«, Euklid, I, 2. Axiom.

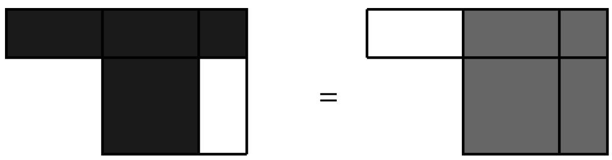


Fig. 27 – Füllt man die Winkelhaken, bleibt die Summe der Flächen identisch

Die Arithmetik der Flächen gleicht in ihrem Ergebnis II 4 oder dem Satz des Pythagoras. Und dennoch unterscheidet sich II 6 grundlegend. Das zeigt Euklids Formulierung:

> Man füge CM beiderseits hinzu; dann ist das ganze Parallelogramm AM= Gnomon NOP.[233]

Dass die Währung sich geändert hat, testiert die veränderte Notation, die den Gnomon mit den drei Buchstaben NOP anschreibt. Der Gnomon wird hier wie ein Winkel angeschrieben. Doch anstelle von Winkelsummen werden Gnomoi gegeneinander verrechnet. Denn der Winkelhaken kann jede Gestalt annehmen, sofern nur seine Fläche identisch ist. Nur darum kann Euklid jedes Vierseit mit jedem Winkelmaß gleichsetzen. Identität schafft allein die ausgewogene Bilanz der Flächen. In diesem letzten Beweis wird somit auch der rechte Winkel obsolet. Mit

III II I

[233] Euklid II 6.

Beweisen dieser Art, wird die Abstraktion auf den Bildflächen der Geometrie erfunden. Mit ihnen löst sich die Geometrie auch von der Anschaulichkeit der Gegenseite und dem Bild des rechten Winkels. Eudemos verbindet sie fortan weniger mit dem Namen der Pythagoreer als mit der Möndchenquadratur von Hippokrates von Chios.[234]

Über zwei krumme Linien: Die Quadratur der Monde

Verändert hat sich bis zur Mitte des 5. Jahrhunderts viel, auch wenn die Zäsur womöglich ein Effekt der lückenhaften Überlieferung ist, die neue Kulturtechniken mit *einem* Namen, *einer* Operation, *einem* Begriff verbindet. Von Hippokrates weiß man nicht viel. Proklos schreibt, dass er der erste Verfasser von *Elementen* (*stoicheia*) gewesen sei:[235] Ihm wird also die Erfindung des Lehrbuchs zugeschrieben. Die *Elemente* ordnen das geometrische Wissen der Zeit in »Prinzipien« und »Folgerungen« an. Es enthielt womöglich große Teile von Euklids *Elemente*. Es versammelte im wesentlichen das pythagoreische Wissen, die Planimetrie der Dreiecke, Parallelen und Parallelogramme [Euklid, Elemente, I], die Anlegung der Flächen [II 6; 12; 13; 14], aber auch die Geometrie vom Kreis [III 3; 20-22; 26-31; 33], die Einschreibung von Quadraten [IV 5, 9] und Sechsecken [IV 15] in Kreisen und jene Verallgemeinerungen zum Satz des Pythagoras [VI 4; 19-20; 31], die Lehre von den Proportionen [VII] sowie einige Sätze über das Verhältnis von kreisförmigen und geradlinigen Flächen [XII 2].[236] Den Inhalt des Lehrbuchs kann man nur über Indizien erschließen, ihn aus den Beweisen der vorhandenen Beweisen entnehmen.[237] Auch wenn Simplicius dabei mit Hinweisen nicht geizt, weil er wie ein Buchhalter jede Übernahme Euklids minutiös festhält, so umgibt den Inhalt dennoch keine klare Kontur.[238] Denn kein Exemplar hat sich erhalten. So sind Proklos und Simplicius dazu verdammt, mit den Augen Euklids auf Hippokrates zu schauen. Es hat den Anschein, dass die Querverweise, mit denen Simplicius Hippokrates umgibt, erst später hinzugefügt

[234] Vgl. Heath zu II 6.
[235] Vgl. Proklos: Vorrede II. Teil (212).
[236] Vgl. auch Heath 1921: I 201 f.
[237] Vgl. Maurice Caveing 1997: 132-136.
[238] Zu den drei Eudemischen Beweisen vgl. Rudio 1907: 47-79.

worden sind. Sie bewirken eher, dass sich die Hippokratischen Beweise nahtlos in das Gebäude der Euklidischen *Elemente* einfügen. Wenn also nur die kurze Notiz von Proklos verlässlich ist, so kann sich gegen den Schwindel der Quellen am Ende nur ein *Dass* behaupten.

Über den Inhalt des ersten Elementbuchs kann man also nur mutmaßen. Und dennoch bleibt eins unzweifelhaft: Der erste Verfasser eines Elementbuchs muss zugleich der Erfinder einer hierarchischen Ordnung sein, die vom Allgemeinen zum Besonderen fortschreitet. Das Format des Elementbuchs findet bald so große Verbreitung, dass es nur knapp ein Jahrhundert später für die Geometrie schlechthin stehen kann. Über die Geometrie schreibt Proklos:

> Sie geht aus von dem unteilbaren Punkt und endigt bei den Körpern, deren mannigfache Unterschiede sie erkundet, und kehrt wiederum von dem Komplizierteren zu dem Einfacheren und dessen Prinzipien zurück.[239]

Mit Euklid ist das Format der *Stoicheia* so sehr zum Inbegriff der Geometrie geworden, dass es untrennbar mit ihrem Wissen verbunden ist. Die Unterscheidung zwischen »Prinzipien« und »Folgerungen« macht die Geometrie zum Mittler der Ideenwelt.[240] So schreibt Proklos mit Platon:

> In ihrem höchsten und geistigsten Bezirk betrachtet sie das wahrhafte Sein und belehrt in Bildern über die Eigenschaften der göttlichen Ordnungen...[241]

In den »höchsten und geistigsten Bezirk« hebt die Geometrie ein Format: das Elementbuch. Hinter den Superlativen verbirgt sich eine Technik des Zeigens und Verweisens, die Bildlosigkeit und Visualisierung auf die Bildflächen der Geometrie bannt.

Hippokrates werden noch zwei weitere Innovationen zugeschrieben. Ihm wird der Versuch zugeschrieben, die Verdopplung des Würfels auf die Suche nach zwei mittleren Proportionalen einzuengen. Er ist der erste, der das Delische Problem vom Raum auf eine ebene Fläche überträgt. Über diese elegante Vereinfachung, die ein Problem auf einen Lehrsatz zurückführt, hat sich nur eine kurze Notiz bei Proklos erhalten.[242] Geschichte geschrieben haben dagegen die Beweise zur Möndchenquadratur, die Simplicius knapp 900 Jahre später Alexander von Aphrodisias und Eudemos folgend zusammengetragen hat. Zeitlich dürften diese Beweise vor der Verfassung des Elementbuches liegen, weil sie mit keiner Silbe das Lehrbuch erwähnen oder sich auf es beziehen.[243] Ein weiterer Umstand kann

[239] Proklos: Vorrede, II. Teil (205).
[240] Vgl. Proklos: Vorrede, II. Teil (205).
[241] Proklos: Vorrede, II. Teil (209).
[242] Vgl. Proklos I 1.
[243] Vgl. dazu Ferdinand Rudio 1907: 13 f.

das bestätigen: Es ist die »Breite und Weitschweifigkeit«, mit der Hippokrates zunächst die Trapeze konstruiert, ehe er den eigentlichen Beweis vollzieht. Voraussetzungen werden wiederholt, Hilfssätze zuweilen doppelt bewiesen.[244] Die Datierung der Beweise fällt leicht. Sie sind um 440 v. Chr. in Athen verfasst.

Die genaue Angabe des Ortes verdanken wird einem Unglück, das Hippokrates nicht ganz ohne Schuld traf. Das Unglück ist in mehreren Versionen überliefert. Aristoteles schreibt:

> Es ist bekannt, dass Leute, die in manchen Dingen sich unverständig erweisen, dies in andern Dingen nicht sind; und es ist dies keineswegs absurd. So war Hippokrates ein geschickter Geometer, im übrigen aber schien er dumm und unvernünftig zu sein; verlor er doch auf einer Seereise eine große Summe Geldes durch die Zolleinnehmer in Byzanz, und zwar aus Einfälligkeit, wie man sagt.[245]

Johannes Philoponos schreibt dagegen in seinem Kommentar zu Aristoteles' Physik:

> Hippokrates, ein Großhändler von Chios, geriet in die Gewalt eines Raubschiffes, verlor alles und kam nach Athen, um gegen die Räuber Klage zu führen. Und da er der Klage wegen lange Zeit in Athen verweilte, ging er zu den Philosophen in die Schule und erlangte eine so große Geschicklichkeit in der Geometrie, dass er sich daran machte, die Quadratur des Kreises zu finden.[246]

Auch wenn Aristoteles sich über Hippokrates Dummheit lustig macht, so steht am Anfang kein Schiffbruch auf hoher See. Der eigentliche Schiffbruch ereignet sich auf dem Festland und dem Rechenbrett. Er treibt der Geometrie endgültig die Anzahlenkunde aus. Nachdem Hippokrates in Athen gestrandet ist, ging er bei den Pythagoreern, den Philosophen, in die Schule, scharte selbst Schüler um sich[247] und verfasste zu diesem Zweck ein Lehrbuch. Doch nicht nur das hat ihm den Ausschluss aus der Pythagoreischen Schule gebracht. Erst das beschriftete Diagramm, das er benutzt, damit die Schüler auch ohne Lehrer die Beweise fehlerfrei vollziehen können, hat die induktiven Rechensteinbeweise der Pythagoreer endgültig verdrängt.

Die drei Beweise, die über Eudemos Hippokrates zugeschrieben werden, sind die ersten Beweise die ein neues Werkzeug verwenden, das aus der Arithmetik der Rechensteine endgültig eine Wissenschaft macht, indem sie das kunstvolle Anlegen von gekrümmten Flächen anstelle von Zählen und Rechnen setzt. Das erste beschriftete Diagramm, jener Kombination aus Buchstaben und Linien, hat Hippokrates überliefert.[248] Der Übergang vom Rechenbrett zur Technik des

I I I I I I

[244] Vgl. Carl Anton Bretschneider 1870: 131.
[245] Aristoteles: Eudemische Ethik 2,1247a, 17-20. Zit n. Ferdinand Rudio 1907: S. 94.
[246] Philoponus zur Physik des Aristoteles 31,3-9. Zit n. Ferdinand Rudio 1907: 95.
[247] Aristoteles: Meteorologie I, 342 b, 35- 343 a 1.
[248] Vgl. Moritz Cantor 1906: I 205.

Zeigens und Verweisens findet genau in diesen Beweisen statt. Der Zeuge dieses Übertrags bleibt der Abakus, der erst bei Hippokrates vollständig zum Universalmedium geworden ist. Nachdem die Pythagoreer das Stellenwertsystem des Rechenbretts für die Geometrie der Zahlen verwendet haben, bedient sich Hippokrates des Formenkanons der Pythagoreer, um mit ihm eine Ordnung zu erzeugen, die das Unsagbare mit der Unanschaulichkeit verbindet. Welchen Gebrauch Hippokrates von dieser neuen Technik macht und welchen neuen Zugriff er dabei auf den Satz des Pythagoras wählt, soll abschließend verdeutlicht werden.

Hier sollen nur die Beweise Erwähnung finden, die Simplicius aus Eudemos wortwörtlich übernimmt.[249] Es sind drei Beweise, die vollständig der Logik der Flächenanlegung folgen. Im ersten Beweis wird über einer Linie ein Halbkreis angelegt, im zweiten eine Kreissegment, dass größer ist als ein Halbkreis, im dritten und letzten Beweis ein Kreissegment, das kleiner ist als ein Halbkreis. Unschwer erkennt man beim ersten Beweis die einfache Flächenanlegung (*Parabel*), im zweiten Beweis die Flächenanlegung mit Fehlern (*Leipsis*), im dritten Beweis die Flächenanlegung mit Überschuss (*Hyperbel*).

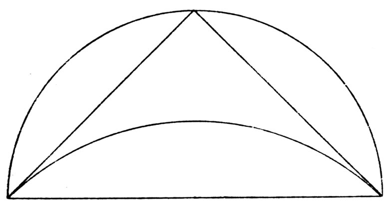


Fig. 28 – Hippokrates, Quadratur der Monde, I. Beweis (Parabel).

Während beim Satz des Pythagoras oder im zweiten Buch der *Elemente* Parallelogramme über der Linie errichtet werden, sind es hier Kreissegmente. Hippokrates muss in irgendeiner Weise Kenntnis von einem Satz gehabt haben, den Archimedes erst Eudoxos zuschreibt: »Kreise verhalten sich zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern«. Dieser Satz, den Euklid mit dem Verfahren der Exhaustion beweist, wird später von Archimedes für die Kreismessung verwendet. Hippokrates nutzt ihn für eine Arithmetik der Kreissegmente. Auf welchem Weg er zu diesem Satz gelangt ist, ist nicht ausgemacht.[250] Diesen Satz kombiniert Hippokrates mit der Geometrie der »Gegenseite«, die er vermutlich von den Pythagoreern übernimmt. Doch die Gegenseite muss nicht im Dreieck liegen, auch muss sie nicht einem rechten Winkel gegenüber liegen. So lassen sich über eine Seite Flächen miteinander bilanzieren, die kreisförmig sind, also weder einem Quadrat noch einem Rechteck entspringen.

III II I

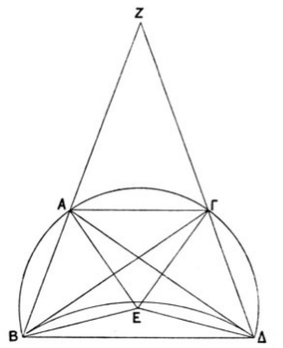
[249] Bericht des Simplicius: 46-78
[250] Vgl. den Kommentar von Heath zu XII 3.

Der erste Beweis (Fig. 28) soll hier aufgeführt werden, um die Methode am einfachsten Beispiel, der Parabel, zu verdeutlichen. Doch enthält er noch keine Buchstabenbezeichnungen. Über die einfache Flächenanlegung schreibt Simplicius:

> Wenn... das Segment über der Basis gleich den beiden über den andern... und beiderseits der Teil des Dreiecks, der jenseits des über der Basis beschriebenen Segments liegt, hinzugefügt ist, so wird das Möndchen [meniskos] gleich dem Dreieck sein. Ist nun bewiesen, dass das Möndchen gleich dem Dreiecke ist, so dürfte es wohl quadriert sein.

Was meint nun die Quadrierung? Der Hinweis auf die Quadrierung ist in dieser Kürze ein wenig missverständlich. Denn das Möndchen ist nicht quadriert. Da es aber einer geradlinigen Figur gleicht, nämlich dem Dreieck, und jede geradlinige Figur quadriert werden kann, so ist damit auch bewiesen, dass das Möndchen quadriert werden kann.

Hippokrates hat mit einer einfachen Flächenanlegung gezeigt, dass die Fläche über der Basis gleich ist mit den Flächen über den zwei Seiten, die den größten Winkel umschließen. Pythagoras legt Quadrate mit Rechensteinen. Und auch II 4 bindet die Geometrie der Flächenanlegung an die Geometrie des Vierseits. Porta geht in drei Büchern zu der *Elementorum curvilineorum* noch einen Schritt weiter, indem er ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Halbkreis umschreibt, um dann in die Quadrate der Gegenseite Kreise und Dreiecke einzuschreiben, die den Kreisen und Dreiecken der kleineren Seiten ähnlich sind.[251] Porta kombiniert den Satz des Pythagoras mit der Möndchenquadratur. Aber sein Blick ist eher rückwärtsgewandt. Er kennt die Unanschaulichkeit der Algebra, die jede Fläche durch Buchstaben ersetzt und setzt die Diagramme gegen die Bildlosigkeit der Algebra. Und überall, wo man Beweise erwartet, verweist er auf Euklid. Hippokrates hingegen setzt die Möndchenquadratur gegen jede Anschaulichkeit. Die Flächenanlegung mit Fehlen verweist zwar auch noch auf den Satz des Pythagoras, doch vermag sie dies nur in der Negation.



$$B\Delta^2 = BA^2 + A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = 3 \cdot BA^2$$

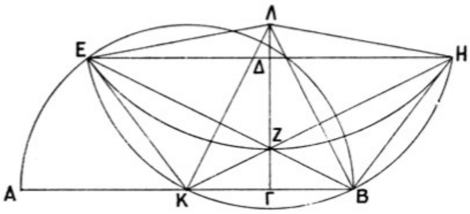
Fig. 29 – Hippokrates von Chios, Quadratur der Monde, 2. Beweis (Leipsis)

Die Ellipse konstruiert Hippokrates über ein Trapez, das drei gleiche Seiten und eine Gegenseite besitzt. Das Quadrat über der Gegenseite ist drei Mal so groß wie die Quadrate über den drei anderen Seiten. Die Basis BA ist also analog zum Satz des Pythagoras [Fig. 29]. Dass sie ein Kreissegment umschreibt, das

III II I

[251] Ioannis Baptista Porta Elementorum Curvilinearum I 25.

größer ist als ein Halbkreis, beweist Hippokrates mit einer Gegenseite, die B und Γ verbindet. Sie wird als »Durchmesser« eingeführt, weil der Beweisgang, so wie Simplicius ihn erläutert, indirekt verläuft. Denn es wird bewiesen, dass die Seiten BA und $\Gamma\Delta$ sich nicht in der Verlängerung schneiden, dass über der Basis kein Quadrat, sondern ein Trapez errichtet worden ist. In einem zweiten Schritt wendet sich Simplicius den Innen- und Außenwinkeln des Dreiecks $\mathrm{ZA}\Gamma$ zu. Die Summe von $\mathrm{ZA}\Gamma$ und $\mathrm{BA}\Gamma$ beträgt 2R. Da jedoch $\mathrm{BA}\Gamma > \mathrm{ZA}\Gamma$ und $\mathrm{BA}\Gamma$ also größer als 1R ist, wird der Satz des Pythagoras zur Ungleichung. Das Quadrat über der Gegenseite muss größer sein als beide Quadrate über den Seiten, die einen stumpfen Winkel umfassen: $\mathrm{B}\Gamma^2 > \mathrm{BA}^2 + \mathrm{A}\Gamma^2$. Schon hier zeigt sich, wie Hippokrates über die Ungleichung den Satz des Pythagoras auch auf nichtrechtwinklige Dreiecke erweitert, so dass die Euklidischen Lehrsätze II 12 und II 13 ebenso auf Hippokrates Konto gehen, wenn auch erst Heron sie als Lehrsatz formulieren wird. Auch die letzten Schritte führen über Ungleichungen. Da $\mathrm{B}\Gamma^2$ größer ist, muss $\mathrm{B}\Delta^2$ kleiner sein. Daraus folgt für die Basis $\mathrm{B}\Delta^2 < \mathrm{B}\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$.[252] So schreibt dann auch Eudemus:



$$\mathrm{EZ}^2 + \mathrm{ZH}^2 = \mathrm{EK}^2 + \mathrm{KB}^2 + \mathrm{BH}^2$$
$$2 \cdot \mathrm{EZ}^2 = 3 \cdot \mathrm{KB}^2$$

Fig. 30 – Hippokrates von Chios, 3. Möndchenquadratur.

> Daher ist der auf der größeren Seite des Trapezes stehende Winkel [$= \mathrm{B}\Gamma\Delta$] ein spitzer. Folglich ist das Segment, in dem er liegt, größer als ein Halbkreis, Und dies ist der äußere Bogen des Möndchens.

Die Konstruktion des Möndchens läuft analog zum ersten Beweis. Simplicius muss sie ergänzen, weil Eudemus und Hippokrates sie für zu trivial halten. Das Kreissegment über der Basis entspricht den Kreissegmenten über den drei gleichlangen kürzeren Seiten des Trapezes. Da die kürzeren Seiten gleich lang sind, ist $\mathrm{B}\Delta^2 = 3 \cdot \mathrm{BA}^2$. Der Mond aber besitzt die gleiche Fläche wie das Trapez. Denn jene Fläche, die er dem Trapez an der Basis entnimmt, setzt er über den drei kürzeren Seiten dem Trapez wieder an.

Während bei Euklid die Beweise immer kürzer werden, weil das System der *Elemente* Verweise optimiert, setzt Hippokrates immer wieder neu an. Der dritte Beweis ist der längste (Fig. 30). In ihm finden sich zahlreiche Wiederholungen.

III II I

[252] Vgl. Eudemus mit Hippokrates in Bericht des Simplicius 55: »Folglich muß die

Wiederum wird ein Trapez konstruiert, das drei gleiche Seiten besitzt. Der Beweis beispielsweise, dass das Trapez von einem Kreissegment, das kleiner ist als ein Halbkreis, umschlossen ist, wird analog zum zweiten Beweis geführt. Nur ist der Winkel EKH ein stumpfer, so dass das Gegenteil bewiesen ist – der Halbkreis also kleiner ist.[253] Obwohl Hippokrates wieder ein gleichseitiges Trapez konstruiert, liegt das Trapez nicht dem Mond zugrunde. Diesmal wird der Mond über die zwei rechtwinkligen Dreiecke EKZ und ZBH und das gleichschenklige Dreieck BZK gebildet. Den äußeren Bogen bilden die Kreissegmente EKBH, den inneren die zwei Kreissegmente EZ und ZH, so dass $\mathrm{EZ}^2 + \mathrm{ZH}^2 = \mathrm{EK}^2 + \mathrm{KB}^2 + \mathrm{BH}^2$. Da die Basen der beiden großen Kreissegmente EZ und ZH zugleich die Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks sind, die drei Seiten des Trapezes aber gleich lang sind, vereinfacht sich die Gleichung: $2 \cdot \mathrm{EZ}^2 = 3 \cdot \mathrm{KB}^2$. Nachdem also die ersten beiden Beweise die Flächenanlegung von den Rechtecken befreit haben, ersetzt dieser letzte Beweis die gleichseitigen Trapeze durch Dreiecke. Eine jede geradlinige Figur kann so durch Einschiebung einer kreisförmigen Figur ähnlich werden, sofern sie sich in Dreiecke zerlegen lässt. Neben der Auflösung des Trapezes durch Dreiecke enthält der dritte Beweis noch eine Neuerung. Er verwendet Buchstaben. Sie befinden sich nicht nur an den Figuren. Sie verweisen auch vom Text auf die Figur, von der Figur auf den Text. Und so hat es den Anschein, dass erst das alphabetisierte Diagramm, das hier den Leser noch ein wenig zögerlich entgegentritt. Es macht die Flächenanlegung zu einer Operation des Zeigens und Verweisens. Wenn Flächen quadriert werden, nehmen sie nicht zwangsläufig die Form eines Quadrates an. Flächeneinschiebung und eine Arithmetik der Flächen ermöglichen es vielmehr, mannigfaltige Figuren ineinander zu überführen. Das Gesetz der Arithmetik ist bei Hippokrates der Satz des Pythagoras. Er tritt hier bereits in einer geometrischen, verallgemeinerten Form auf. Anstelle der Rechensteine operieren nicht nur Flächen. Die Ungleichung ermöglicht es, dass zugleich auch spitz- und stumpfwinklige Dreiecke in den Blick geraten. Die Möndchenquadratur ist noch immer ein Effekt der Gegenseite. Doch die Gegenseite ist weniger Figur als Modul eines Wissens, das seine Abstraktion zu gleichen Teilen der Visualität und Bildlosigkeit des Diagramms verdankt.

III II I

[253] Vgl. Bericht des Simplicius 66 und Euklid *Elemente* II 13.

Die Alphabetisierung der Mathematik ermöglicht die bildlose Schau. Ein Kreis bleibt nicht mehr ein Kreis. Er kann eine Klasse von Kreisen bezeichnen, so dass Proklos schließlich im 2. Jahrhundert n. Chr. über die »Geometrie vom Kreise« schreibt:

> ... sie... handelt von vielen, jeden einzelnen darstellend und bei allen das gleiche feststellend.[254]

Die griechischen Buchstaben wirken zweifach. Als Zahlen belegen sie die Diagramme mit Beispielen. Als Adressen geometrischer Elemente machen sie das Diagramm zu einer bildlosen Technik des Zeigens und Beweisens. Deshalb können nicht nur Text und Bild aufeinander bezogen werden. Auf dieser Technik gründet die axiomatische Methode, die alle Sätze reiht – jedem Satz im System eine Adresse zuweist. Doch an ihrem Ende stehen nicht nur die *Elemente* des Euklid und der deduktive Beweis. Auf derselben Technik ruht auch der Neoplatonismus von Proklos auf. Wenn Proklos über Euklid schreibt, dass die Geometrie der Mittler zwischen der Welt der Ideen und den konkreten Gegenständen sei,[255] dann nutzt er für seine Metaphysik die Erfindung, die Hippokrates zugeschrieben wird: die Verweistechnik des Diagramms. Durch das Alphabet kann das Diagramm auf eine Ideenwelt verweisen, ohne dass es selbst an dieser Welt teilhaben muss.

Die Römer vergessen Hippokrates. Sie setzten die formale Tradition der Griechen nicht fort. Sie »steineln«, um zu rechnen. In der Geschichte der Mathematik scheinen die Römer rückständig zu sein.[256] Und dennoch wird um 1202 in Bugia, am südlichen Rand des Mittelmeers, aus den Spalten der Rechenbretter das Stellenwertsystem der Ziffern hervorgehen. Doch bevor die römischen Zahlzeichen auf die Ziffern treffen, muss ihre Gestalt und Operabilität hier klar vor Augen treten. So bleibt weniger zu zeigen, was sie auszeichnet oder was sie zurückwirft. Vielmehr will ich untersuchen, wie die Rechenfläche den Aktionsradius der Zahlen bestimmt. Die römischen Zahlzeichen sind kein Produkt der Schrift sondern der Rechentafel. Deshalb können sie das Stellenwertsystem der Ziffern begründen.

I I I I I I

[254] Proklos 1945: 203.
[255] Proklos 1945: 205; 209
[256] Die Zahlengeschichten von Menninger (1957: II 45) und Ifrah (1991: 175-183) sind hier beredt. Sie verbuchen die römischen Zahlen unter die Zahlschrift der Kerbhölzer. Vgl. dazu das folgende Kapitel.

B

BÜRO ALS ÜBERTRAG

Der erste Teil handelte von der Geometrie. Ich habe gezeigt, wie die Griechen die ebene Fläche als Denkwerkzeug entdecken. Ich habe untersucht, wie sie auf der ebenen Fläche den formalen Umgang mit Punkten, Linien erlernen. Aus diesem Umgang entsteht die Abstraktion. Sie macht heterogene Dinge, Aussagen und Menschen miteinander vergleichbar. Sie sorgt für Gleichförmigkeit. Und das selbst vor Gericht. Dass alle Menschen gleich behandelt werden, gründet auf der Abstraktion. Unter welchen Bedingungen beginnen zwei Menschen einander zu ähneln? Warum kann man sie aufeinander beziehen? Den Blick auf das Gemeinsame oder das Ausblenden der Unterschiede findet man zuerst in der Geometrie. Der Abstraktion hat der Erfinder des modernen Gleichheitszeichens ein Denkmal gesetzt. Die Wahl der zwei parallelen Linien begründet Robert Recorde 1557 mit vollkommener Gleichheit – »because noe. 2. thynges, can be moare equalle«, schreibt Recorde. Aber wie kann man zwei Linien aufeinander abbilden? Warum gleichen sie einander? Und wie können sie diese Gleichheit mitteilen? Wie kann man denken, dass das Band zwischen den Dingen und der Sprache fest geknüpft ist? Man muss über etwas sprechen, was nicht anwesend ist, aber jedem scheinbar unmittelbar vor Augen steht. Wie kann man hoffen, dass der andere versteht, was man meint? Womöglich braucht jeder Anfang eine mehrheitsfähige fixe Idee.

Verstehen beruht auf Kulturtechniken, Wissen zu einem nicht geringen Teil auf Schreibflächen und ihren Zeichensätzen. Auf welchen Praktiken und Techniken des Wissens gründet die Abstraktion? Welches Wissen ruft sie hervor? Abstrahieren beruht auf dem Absehen von Detailwissen – man wählt aus, man vergisst planmäßig. In diesem Sinne ist die Abstraktion der Schrift diametral entgegengesetzt. Ihre wichtigste Kulturtechnik ist das Tilgen, Löschen und Vergessen. Der zweite Teil dieses Buchs beschäftigt sich mit den Techniken des Löschens. Die Geschichten der Schrift sind ohne Zahl. Die Geschichte des Löschens wurde dagegen nur selten gestreift. Dabei hinterlässt auch das Löschen Spuren. Es macht einen Unterschied, ob man Zeichen von einer Wachstafel, einer Staubtafel, von Papier, Tontafeln, Statuen oder von der Festplatte eines Computers löscht. Man kann löschen, indem man wischt, ersetzt, überschreibt oder streicht. Man kann etwa Zeichen tilgen, dass am Ende noch sichtbar bleibt, *dass* oder *was* gelöscht wurde. Oder man kann Akten und Daten nahezu spurlos verschwinden lassen. Egal welche Löschtechnik man anwendet – die demokratische oder die diktatorische – jede Technik besitzt ihre eigene Grammatik. Dass die Techniken und Praktiken des Löschens in nahezu unsichtbar bleiben, mag vermutlich weniger daran liegen, dass wir sie vergessen haben. Wir haben womöglich die Bedeutung des Löschens gar nicht bemerkt. Aber eine Kultur, die nicht löscht, muss irgendwann an ihrer eigenen Erinnerung ersticken.

Auf den Schreibflächen der Geometrie kann der Schattenstab mit einer einzigen Geste zeigen und verweisen, er verbindet die Dinge mit ihren Bildern und einer Sprache. Dabei entdecken die Griechen mit der ebenen Fläche auch den Plural. Doch in diesem Teil geht es weniger um den Plural als um die Beweglichkeit der Zeichen. Wie kann man Zeichen zwischen Spalten, Seiten und Orten übertragen? Wie stellt man sicher, dass die Übertragung ohne Fehler ist? An dieser Stelle kann man schon erahnen, wie aus der idealen Vorstellung einer ebenen Fläche zum ersten Mal das Büro im alltäglichen Sinne entsteht: Was verwaltet unsere Gedanken? Wenn die Klassische Geometrie mit der Abstraktion eine Straße durch unsere Gedanken legt, und mit dieser Straße unsere Gedanken erst ermöglicht, so ergänzen die Römer und das europäische Mittelalter diese Straße durch Kleeblätter, Leitplanken und eine Überholspur. In diesem Teil werde ich also zeigen, wie aus den Routen der klassischen Geometrie die Routinen der Verwaltung entstehen. Darum schaue ich an manchen Stellen zurück. Das betrifft etwa die Rechensteine. Um die römischen Rechensteine entsteht etwa – im Gegensatz zu den griechischen Zahlzeichen – ein System, das Zeichenbewegungen merkt und aufschreibt. Die die indisch-arabischen Ziffern errichten schließlich eine beispielslose Überwachung. Die Internetprotokolle, IP-Adressen und die Software-Agenten haben hier ihre sichtbarsten Vorläufer. Mit den indisch-arabischen Zahlen entsteht das Büro im engeren Sinne. Es ist Speicher- und Operationsmacht.

Das Wissen der Römer, das auf den Kulturtechniken des Löschens beruht, muss eine eigene Gewalt besitzen. Diese brachiale Macht der Schreibflächen zeigt sich etwa in der römischen Verwaltung, ihren Posten, ihren Gesetzen, den Prozessen, ihren Strafsystemen, sie schlägt sich nicht zuletzt in der Ausbreitung ihres Reiches nieder. Wie ist diese Macht der Oberfläche strukturiert? Welche Körper diszipliniert sie? Welche Imperien bewohnt sie außerhalb unserer Köpfe?

Wie die griechischen Rechensteine gründen auch die römischen Steine, die *calculi*, auf einem Stellenwertsystem. Und so müssen die römischen Zahlen nicht mehr verweisen. Ihren Wert beziehen sie von ihrem Stellenwert auf der Fläche. Nachdem ich im ersten Teil gezeigt habe, wie sich die Schreibfläche formiert, blicke ich nunmehr auf die Zahlen und Operationen, die die Fläche zu einem Ort der Verwaltung machen. Wie bei den Griechen steht am Anfang ein kultureller Übertrag. Pythagoras, Thales, Anaximander bringen die ägyptische Mathematik von ihren ägyptischen Reisen als Souvenir nach Griechenland. Sie erfinden mit ihr die Abstraktion – eine Eigenschaft, die ihnen nur zufällt, weil sie die ägyptische Mathematik ignorieren und missverstehen. Die Römer übersetzen wiederum die griechischen Schriften und passen sie der eigenen Kultur an. Auch Cicero hat griechische Philosophen übersetzt. Es gehe aber weniger darum, sie zu verstehen, so versichert er,

> »...es war vielmehr immer meine Überzeugung, dass unsere Landsleute in allem teils aus eigener Kraft klügere Erfindungen gemacht haben als die Griechen, teils das von ihnen Übernommene verbessert haben, soweit sie es jedenfalls für würdig erachteten, sich damit zu beschäftigen.«[257]

Man kann nur aneignen, wenn man löscht. Das scheint Cicero sagen zu wollen. Doch das kann man auf unterschiedliche Art und Weise. Noch einmal kehre ich zu den Steinen zurück. Ich will das Löschen weniger aus der sicheren Flughöhe einer Kultur beschreiben. Darüber kann man bestenfalls spekulieren. Auf der Schreibfläche zeigt sich dagegen das Löschen in konkreten Operationen. So kann man etwa fragen: Wie löschen die Römer auf ihren Rechenbrettern? Aber auch, wie kann man Zahlen bewegen? Denn wenn man Zahlen von einem Ort zu einem anderen übertragen will, wie etwa beim Zehnerübertrag, muss man sie andernorts löschen. So sind Löschen und Schreiben untrennbar miteinander verbunden. Die Steine der Römer, ähneln den griechischen Rechensteinen nur bedingt. Ihre Tafeln sind anderen Zahlsystemen angeschlossen. Sie existieren in einer anderen kulturellen Konstellation. Um diesen Übertrag und Unterschied zu diskutieren, gebe ich insgesamt drei Antworten. Eine erste Antwort suche ich bei den Griechen. Ich schaue auf die Zahlsysteme, die ihrem Alphabet entspringen: Das sind die akrophonische Zählschrift und die Buchstabenzahlen. Meine zweite Antwort ist römisch und darin sprechend: Sie vergisst ihre griechischen Ursprünge. Die römische Zahlschrift reicht über das Rechenbrett des Kaufmanns und Buchhalters hinaus. Sie ist ein Werkzeug der Verwaltung. Auf die Zahl gründen darum die Römer in einem sehr buchstäblichen Sinn die Einheit des Imperiums. So ende ich mit einem Ausblick auf das Amt des Stellvertreters, um an einem einzigen Beispiel zu skizzieren, auf welchem Weg die Löschtechniken der Schreibfläche auf die Verwaltung des Imperiums überspringen. In einer dritten und letzten Antwort streife ich die Null. Ich will zeigen, wie die *calculi* zum Fundament einer Kulturtechnik werden, die Zahlenbewegungen protokolliert überschreibt.

III II I

[257] Cicero, Gespräche in Tusculum I 1, 1

DIE ORDNUNG DER ZAHLEN

Zurück zum Anfang, zur Amnesie und Blindheit der Römer. Sie verwerfen die Buchstabenzahlen, für die sie keine Verwendung finden. Sie schätzen additive Zahlsysteme, da sie mehr als die Griechen den Abakus als Hilfsmittel für Verwaltung und Buchhaltung verwenden. Aber um den Einsatz der römischen Zahlzeichen zu ermessen, will ich kurz auf die griechische Zahlengeschichte eingehen, um eine Kulturtechnik zu skizzieren, die im Schlagschatten von Ciceros Polemik liegt: das Buchstabieren, Zählen und Rechnen mit dem Alphabet.

Die Griechen verwenden zwei Zahlsysteme: die akrophonische Zahlenschrift und die Buchstabenzahlen. Die Anfänge der Zahlsysteme liegen im Dunkeln, dennoch haben sie im Alphabet einen gemeinsamen Ursprung. Der Erfindung des Alphabets, die Powell mit der Aufzeichnung der Odyssee um 800 ansiedelt,[258] liegen zwei Kulturtechniken zugrunde, die zwei Jahrhunderte später in unterschiedlicher Weise in den Zahlsystemen wirksam sind: Die Zerlegung der Wörter in Buchstaben und die Anordnung der Buchstaben in einer Reihe.

Über die Zerlegung

Was bewirkt die Zerlegung? Für das Alphabet ist sie so fundamental wie der Setzkasten für den Buchdruck. Die medialen Schneisen, die sie schlägt, können hier nur angedeutet werden. Die Silbenschrift kann nur eine Sprache anschreiben. So verlangt nicht nur jede Sprache nach ihrer eigenen Schrift. Nur wenn die Lautstruktur bekannt ist, können die geschriebenen Wörter ausgesprochen werden. Das griechische Alphabet hingegen kann mit seinen 24 Zeichen fast jede Sprache anschreiben. Denn im Gegensatz zur Silbenschrift kann es auch die lautliche Struktur der Sprache erfassen.

> The Greek alphabet was the first writing that informed the reader what the words sounded like, whether or not he knew what the words meant,

schreibt Powell.[259] In der Universalität ist das Alphabet gleichsam eine Turingmaschine unter den analogen Zeichensätzen. Auch schon allein darum muss

III II I

[258] Barry B. Powell 1996: 20.
[259] Barry B. Powell 1996: 3.

Cicero die Ursprünge der römischen Aufschreibesysteme nicht nennen. Er braucht nur ihre Technik studieren, um ihre Vorteile zu nutzen.

Auch wenn die Buchstaben geritzt oder in Stein geschlagen sind, folgen sie nicht mehr der Spur des Meißels. Darauf scheint Aristoteles zu verweisen, wenn er die Buchstaben in der *Metaphysik* nicht mehr *grammata*, sondern *stoicheia* nennt. Warum ändert er die Bezeichnungen? Wofür steht das neue Wort *stoicheia*? Eine Erklärung findet man bei Dionysius von Halicarnassos:

> »Es gibt in der menschlichen Sprache und Aussprache Anfänge, die nicht weiter zerlegt werden können, die wir Buchstaben und Elemente nennen: [Es sind] Buchstaben[γραμματα], weil sie durch Linien [γραμμαι] bezeichnet werden, und Elemente[στειχεια], weil jedes Geräusch, das mit der Stimme erzeugt wird, von ihnen ausgeht und schließlich in sie zerfällt«.[260]

Die *grammata* verweisen auf die gemeißelte Schrift und den Riss, *stoicheia* dagegen auf die Modularität. Gerade weil die Buchstaben die kleinsten Elemente sind, können sie jeden Laut bilden und zerlegen. Das Wort *stoicheia* besitzt also zwei Bedeutungen. Die Elemente sind die kleinsten Teile, in die man eine Sprache zerlegen kann und zugleich sind sie auch die kleinsten Bausteine, aus denen man eine Sprache bilden kann. Zerlegen und Reihen bezeichnen zwei gegensätzliche Operationen derselben Form, nämlich der Elemente. Was bedeutet es also, wenn Aristoteles den Buchstaben nicht mehr als Riss, sondern Element beschreibt? In der *Metaphysik* gibt es nur einen Satz, in dem der Buchstabe noch einmal zum Riss mutiert. Es ist eine Stelle, die Riss und Elemente in einen Satz zwingt, deshalb muss Aristoteles noch einmal auf die alte Bezeichnung der *grammata* zurückgreifen.

In welcher Form liegen die Elemente vor, sind sie von den Dingen geschieden? Gibt es dieselben Dinge zweimal? Auf diese Fragen antwortet Aristoteles mit einem Bedingungssatz, der dennoch Bände spricht:

> ...wenn also die Prinzipien der Dinge nicht auf diese Weise existieren, sondern wenn sie der Zahl nach eins sind, so gäbe es neben den Elementen gar nichts davon Verschiedenes.

Und er führt sogleich aus, wie er dies meint:

> Es trifft sich also gerade so, wie wenn die Elemente des Lautes der Zahl nach festgelegt wären; es müßten dann alle Buchstaben (grammata) so viele sein als es Elemente (stoixeia) gibt, wobei keinesfalls zwei oder mehrere Buchstaben von derselben Art sein dürften.[261]

Man mag sich wundern, warum Aristoteles das Alphabet-Beispiel unter den Aporien abhandelt. Das griechische Alphabet ist ja eine Lautschrift. Doch noch

III II I

[260] Dionysios v. Halicarnassos: *de compositione verborum* XVI [136-138]. Den Hinweis auf Dionysios v. Halicarnassos verdanke ich Friedrich Kittler.
[261] Aristoteles: Metaphysik III 999b 30 und 1000a 5.

einmal: Was wird behauptet? Was wird widerlegt? Einen wesentlichen Anteil hat der Konjunktiv. Der Buchstaben ist nicht Mittler des Lauts. Das Verhältnis kehrt sich vielmehr um: Der Laut wird zum Boten des Buchstabens. Diese Geiselhaft des Lauts durch den Buchstaben hat einen hohen Preis. Sie lässt den Buchstaben auf der Wortebene noch einmal zur Linie (*gramma*) werden. Wenn der Buchstabe den Laut unterwirft, büßt er den Namen ein, der ihn zur Elementschrift macht. Diesen Widerspruch fasst dieser Satz. An welche Buchstaben mag Aristoteles denken? Eine Stelle in der *Poetik* gibt Aufschluss. Dort geht es um die Elemente der Sprache:

> Ein Buchstabe [stoicheion] ist ein unteilbarer Laut, nicht jeder beliebige, sondern ein solcher, aus dem sich ein zusammengesetzter Laut bilden lässt.[262]

Auch hier ist das (*stoicheion*) die kleinste Einheit der Sprache. Ihn teilt Aristoteles in drei Klassen ein: in Vokale, Halbvokale und Konsonanten.[263] Er folgt dabei einer Unterteilung, die auch schon Platon geläufig ist.[264] Aber Platon nennt nur die Kategorien, Aristoteles ist dagegen konkreter. Er macht die Mundhöhle als Medium des Lautes aus. Er nennt die Formung der Lippen. Er beschreibt die Artikulationsstelle. Länge und Kürze sowie Tiefe und Höhe weisen dem Laut einen technischen Ort an.[265] Die Metrik aber ist der Grund für diese Unterscheidung.[266] Um zwischen langen und kurzen Silben zu unterscheiden, geraten die Qualitäten der Buchstaben und Laute selbst in den Blick.[267] Doch zurück zur Unterscheidung. Vokale sind »Laute«. Das sagt schon ihr Name: phoné. Nur bei den Vokalen ist das Verhältnis zwischen Buchstabe und Laut an dieser Stelle ausgeglichen. Ein Buchstabe entspricht einem Laut. Anders verhält es sich bei den Konsonanten. Die Grenze markieren die acht stimmhaften Konsonanten. Sie sind Halblaute. Sie gehören in der Tat mit den Vokalen zu den »stimmhaften« Lauten.[268] Über sie schreibt Dionysios, dass sie zwar nicht lauten, aber »selber gewisse ähnliche Geräusche hervorbringen – Zischen, Rauschen, Murmeln oder ähnliche Geräusche«.[269] Die restlichen neun Konsonanten können

III II I

[262] Aristoteles Poetik: 1456 b 20.
[263] Vgl. Aristoteles Poetik: 1456 b 25.
[264] Vgl. Platon Kratylos 424c. Zu den *mutae* vgl. Raphael Kühner / Friedrich Blass 1966: 1,1 §7.
[265] Vgl. Aristoteles: Poetik 1456b 30.
[266] Ebd.
[267] Vgl. auch Wilhelm Schwabe 1980: 140.
[268] Vgl. Aristoteles: Poetik 1456b 25.
[269] Dionysios v. Halicarnassos: *de compositorum verborum* XIV [138]..

nur in Verbindung mit einem Vokal oder Halbvokal einen Laut erzeugen.[270] Sie selbst sind stumm und bringen die Arithemtik des Alphabets durcheinander. Es bildet eben nicht 1:1 die Lautstruktur der Sprache ab. An die stummen Konsonanten mag Aristoteles gedacht haben, wenn er schreibt:

> Es müssten dann alle Buchstaben (grammata) so viele sein als es Elemente [des Lauts] gibt...

Die Konsonanten sorgen dafür, dass das Vokalalphabet niemals zum Element des Lautes werden kann. Der Konjunktiv entspricht dabei der *reductio ab absurdum*. Ehe das letzte Wort, den Satz beschließen kann, ruft er dem Leser zu, dass dies unmöglich sei. Doch damit nicht genug. Erst ein einschränkender Zusatz mag den Satz beenden.

> ...wobei keinesfalls zwei oder mehrere Buchstaben von derselben Art sein dürften.

Allein die Einschränkung macht die Erfüllung der Forderung unmöglich. Nur kurz sollen hier die Gründe Erwähnung finden. Dazu muss man Aristoteles verlassen und zu den Anfängen des Vokalalphabets springen. Vieles spricht für die Adapterthese, dass das griechische Alphabet nicht allmählich und buchstabenweise, sondern als System von den phönizischen Nachbarn übernommen worden ist. Denn nur als System kann es seine Vorzüge als Lautschrift offenbaren. Gerade deshalb müssen die Buchstaben erst der griechischen Sprache angepasst werden. Denn selbst wenn ein Befehl die Übernahme diktierte: die Lautstruktur der griechischen Sprache kann sich nicht dem phönizischen Silbenalphabet unterwerfen. Von den missgestimmten Ohren, die den Griechen die Vokale geschenkt haben, wird noch die Rede sein. Gerade weil die Griechen in das phönizische Konsonantenalphabet ihre Vokale eingeschmuggelt haben, halten auch die restlichen Zeichen nicht ihren Ohren stand. Ihre neuen Vokale haben Verschluss- und Reibelaute geschluckt. So mag es nicht wundern, dass gerade Reibe- und Verschlusslaute an einer anderen Stelle die Relation zwischen Lauten und Graphemen durcheinander bringen. So etwa die drei zusammengesetzten Konsonanten: φ, χ und ψ.[271] Mit diesen Konsonanten ergänzen die Griechen nachträglich die phönizische Alphabetreihe. Die zusammengesetzten Konsonanten veranschaulichen, dass sie offensichtlich mit ihrer Elementschrift keineswegs nur die kleinsten Elemente verzeichneten. Zugleich untergraben die Dialekte jede axiomatische Effizienz. Eine Sprache ist

III II I

[270] Vgl. Aristoteles: Poetik 1456b 30 und für die Hervorlautung Dionysios v. Halicarnassos: *de compositorum verborum* XIV [140].
[271] Vgl. Barry B. Powell 1996: 52-54 u. Roger D. Woodward 1997: 137 –138.

nicht so streng aufgebaut wie die Geometrie, schon allein, weil sie nicht aus einem Brettspiel hervorgegangen ist, sondern dem Alltag des Gesprächs folgt. Die östlichen Dialekte zeigen, dass die zusammengesetzten Konsonanten nicht der Lautstruktur entspringen, sondern womöglich nachträglichen Optimierungen der Schrift. Man mag darüber streiten, ob die zusammengesetzten Konsonanten Verwerfungen und Unordnung signalisieren oder die Elemente einer Kurzschrift sind, die häufige Kombinationen durch ein neues Zeichen komprimiert.[272] Eines ist offensichtlich: Das griechische Vokalalphabet versteht unter *stoicheia* nicht die kleinsten Teilchen.

Aristoteles hat vielleicht an die Kompositzeichen gedacht haben, als er die Buchstaben mit ihrem ursprünglichen Namen *grammata* bezeichnet hat. Trotzdem markiert diese Stelle in der *Metaphysik* einen Wendepunkt. Sie wirkt wie eine nostalgische Erinnerung. Bei Dionysios geht der Riss mitten durch das Alphabet. Vokale sind Laute, Laute Elemente, Konsonanten sind dagegen stimmlos. Sie sind nur mit Lauten oder Halblauten tönend. Das macht sie zu Geräuschen. Geräusche sind Buchstaben, aber keine Elemente. Dionysios verweist vermutlich mit Aristoxenes auf ältere musiktheoretische Quellen.[273] Aristoteles hat sich dagegen von diesen Wurzeln entfernt. *Stoicheia* meint nicht mehr Lautung. Bei Dionysios hat dagegen jeder Buchstabe seinen Ort, den die Lautung diktiert. Die Einheit des Alphabets gibt der erste Buchstabe des Alphabets, α, vor. Denn der Mund forme bei seiner Artikulation die größtmögliche Öffnung. An dieser Artikulation des α werden alle weiteren Buchstaben gemessen, an seiner Richtschnur alle Buchstaben ausgerichtet.[274] Bei Aristoteles folgen dagegen die einzelnen Buchstaben nicht einer Axiomatik des Lautes. *Stoicheia* meint das Alphabet. Die Unterscheidung zwischen *grammata* und *stoicheia* verläuft nicht horizontal. Sie steht für zwei Zustände. Wenn schon kein Riss die Buchstaben trennt, worin besteht also die Wendung des Alphabets? Der singuläre Satz der *Metaphysik*, so scheint es, funktioniert wie ein Schalter, der die Buchstabenschrift von Inschrift auf Elementschrift umstellt. Aber die Änderung des Alphabetnamens liegt zur Zeit von Aristoteles' bereits in der Vergangenheit. Warum bezieht er sich auf dieses Ereignis? Die Antworten findet man weniger in den Anfängen des Alphabets, sondern in seinen verschiedenen Gebrauchsweisen. Wie wandelt sich der III II I

[272] Vgl. dazu Roger D. Woodward 1997: 139.
[273] Vgl. Dionysios von Halicarnassos: de compositione verborum XIV [138].
[274] Dionysios von Halicarnassos: de compositione verborum XIV [142].

Gebrauch des Alphabets? Eine wesentliche Antwort liefert die Zerlegung – im folgenden will ich also diskutieren, welche Kulturtechniken der Zerlegung zugrunde liegen.

Eine Namensänderung erzeugt dabei noch keine mediale Zäsur. Sie reagiert und bezeugt, dass das Alphabet im 4. Jahrhundert die Universalität seines Zeichensatzes längst von der Lautsprache gelöst hat und sie über die Fläche auf andere Wissenssysteme übertragen hat, um dort analoge Ordnungen in eine abzählbare Menge von Elementen zu zergliedern. Die Segmentierung ist der erste Schritt zur Operationalisierung. Das gilt beispielsweise für die Philosophie. Über die »ersten Philosophen«, die Atomisten, schreibt Aristoteles in der *Metaphysik*:

> Das nämlich, woraus alles Seiende ist und woraus als dem ersten es entsteht und worin es letztlich wieder untergeht..., das nennen sie Element, das Prinzip des Seienden.[275]

Das Alphabet hat es den Ersten Philosophen ermöglicht, das Prinzip zu denken. Es hat ihnen ermöglicht, zum ersten Mal die Frage nach dem Ursprung zu stellen. »The inventors of the atomic theory of matter«, schreibt Powell,

> were the first possessors of a system of writing whose graphemes represent the 'atoms of spoken language', an analogy explicit in the Greeks' use of the word *stoicheion*...[276]

Solange Buchstaben nur Inschrift sind, bleibt diese Frage ungestellt. Wie sehr Aristoteles die Frage nach dem Seienden in der Logik des Alphabets denkt, zeigt seine Beschreibung. Leukipp und Demokrit, so heißt es in der *Metaphysik*, haben nicht nur das »Seiende« als Element gedacht, sondern auch das »Nichtseiende«. Sie haben mit dem »Vollen« auch die »Leere« gesetzt. Die Leere aber ist im Stoichedon-Stil nicht nur ein Gegensatz. Sie ist eine Leerstelle: ein Spatium. Dass die Leere und mit ihr das Element so technisch zu denken sind und die erste Philosophie vollständig im Bann des Buchstabens steht, wird sogleich offenbart. Während das Element die Einheit ist, aus der das Volle und die Leere entstehen, werden alle Erscheinungen als »Affektionen« aus ihr abgeleitet. Die Ableitungen beschreiben Leukipp und Demokrit durch drei Unterschiede. Es sind »Gestalt«, »Anordnung« und »Lage«.[277] Um die Unterschiede darzulegen, wählt Aristoteles ein Beispiel:

I I I   I I   I

[275] Aristoteles Metaphysik 983b 10. Die erste Philosophie fasst aber Aristoteles nicht nur chronologisch. Die erste Philosophie ist in seinen Worten zugleich auch die Eine Philosophie: das »Das« der Philosophie. Sie ist nicht nur chronologisch, sondern auch axiomatisch der Ursprung der Philosophie. Vgl. Metaphysik 1003b 35.
[276] Barry Powell 2002: 23.
[277] Aristoteles Metaphysik I 985b 10.

> So unterscheidet sich nämlich A von N durch die Gestalt. AN von NA durch die Anordnung und Z von N durch die Lage.[278]

Und dies ist nicht nur irgendein Beispiel. Wenn das Volle und die Leere auf dem Alphabet gründen, so gilt das auch für ihre Ableitungen. Die Philosophie der Atomisten ist selbst nicht elementar. Ihr Ursprung ist das Alphabet. Doch so sehr der Buchstabe die Beschreibung der Ersten Philosophie durchdringt, so wenig kann sie Aristoteles genügen:

> Die Frage nach der Bewegung..., woher oder wie sie den Dingen zukommt, haben auch diese wie die anderen, leichtfertig übergangen.[279]

Doch diese Enttäuschung kann nicht tief wurzeln. Denn die Ersten Philosophen können für Aristoteles nur ein erster Anfang sein. Und als erster Anfang können sie in ihren Ansichten nicht besonders avanciert sein. Sie haben ja keine Vorbilder. Das weiß er. Das schreibt er.:»... die Erste Philosophie schien über alle Dinge nur zu stammeln, da sie noch jung war und am Beginn stand«.[280] Die »ersten Philosophen« sind die Ersten, die im Takt des Buchstabens denken. Erst Aristoteles legt den Schalter um. Er schließt die Erste Philosophie mit ihren Schreibflächen kurz. Wenn die Erste Philosophie mit Aristoteles nicht denkt, sondern buchstabiert, werden andere Fragen zentral. Wenn die Frage nach dem Prinzip des Seienden immer schon eine Operation auf der Schreiboberfläche in Gang setzt, dann folgt aus dem Nichtseienden die Frage nach der Bewegung. Bewegung aber zielt auf die Operationen, mit denen man Zeichen auf der Fläche schreiben und löschen kann. Sie sind auch für die Zahlenbewegung, die Logistik und die Arithmetik grundlegend.

Doch zurück zur Segmentierung: An dieser Stelle mag ein letztes Beispiel genügen, um die Wirkungsmächtigkeit der Zergliederung zu verdeutlichen. Auch die Geometrie begründet das Alphabet. Für die Anfänge des deduktiven Beweises in der Geometrie ist dies im vorhergehenden Kapitel gezeigt worden. Der Beweis besteht aus einer Kette von Konstruktionen, die durch Buchstaben in Einzelschritte zerlegt und dauerhaft nachvollziehbar werden. Wenn also Pythagoras der erste ist, der eine Schule gründet, so setzt Hippokrates, der selbst in Athen bei den Pythagoreern in die Schule gegangen ist, alles daran, die erste Schule wieder aufzulösen. Seine Schüler brauchen nicht die Stimme eines Lehrers. Denn Hippokrates ersetzt den Lehrer durch die Bildflächen der Diagramme. Nur einmal folgt er den Stimmen der Pythagoreer, um sie fortan durch eine
III II I

[278] Aristoteles Metaphysik I 985b 15.
[279] Aristoteles Metaphysik I 985b 15.
[280] Aristoteles Metaphysik I 993a 10 f.

Kombination von Linien und Buchstaben zu ersetzen, um sie in eine endliche und dauerhaft nachvollziehbare Reihe von Konstruktionen zu übertragen. Hippokrates ist der erste, der die Bezeichnung des Zeichensatzes auf eine Ansammlung geometrischer Sätze und Beweise überträgt. Dort sind die Buchstaben weniger Anzahl als Verweis. Auf der Bildflächen der Geometrie verweisen sie auf eine Klasse gleichförmiger Objekte: sie werden zu Agenten der deduktiven Geometrie. In der Schrift verweisen sie auf Schrift. Sie organisieren das Verweissystem der Elemente. Sie schließen Prinzipien und Folgerungen kurz.

Über die Reihung

Das Alphabet verbindet mit den Elementen nicht nur die Segmentierung in kleinste Einheiten. Die Zahlsysteme greifen auf eine Eigenschaft zurück, dem der neue Zeichensatz seinen Namen verdankt. *A* folgt *B*. Das Alphabet segmentiert nicht nur. Es reiht. Es ordnet an. Jedes Element findet einen Platz in der Reihe. Der Platz bestimmt seinen Wert. Das Alphabet ist in dieser Hinsicht ein Stellenwertsystem. Es diktiert eine Reihenfolge, die bedingungslos eingehalten wird. Selbst wenn eine Sprache diese Elemente in Unordnung bringt, behalten sie ihre Adresse in der Reihe des Alphabets. Egal welche »Anordnung« die Buchstaben einnehmen, ihre »Lage« in der Alphabetreihe bleibt erhalten. Die Buchstaben können nicht austreten oder desertieren. Auf diese Eigenschaft greifen die griechischen Zahlsysteme sowohl ordinal, als auch kardinal zurück. Und das geschieht auf unterschiedliche Weise. So will ich erst auf die Buchstabenzahlen und dann auf die akrophonischen Zahlen eingehen, um die verschiedenen Kulturtechniken des Löschens darzulegen und miteinander zu vergleichen.

Über eine numerische Kurzschrift

Die akrophonische Zahlenschrift ist eine numerische Kurzschrift. Sie geht von den Zahlwörtern aus, isoliert den ersten Buchstaben. Ihn wählt sie als stenographisches Zeichen der Zahlwörter. Doch die Kurzschrift ist keine singuläre Erfindung dieser Zahlschrift. Sie ist alt, so alt wie das erste Alphabetreihe,[281]

[281] Barry Powell 1996: 21.

das Keilschriftalphabet von Ras Shamra.[282] Seit dem 14. Jahrhundert ist die verkürzte Anschreibung eine Eigenschaft der Buchstabennamen. Schon bei den semitischen Namen gilt »das akrophonische Prinzip«.[283] Der Lautwert wird dort immer vom ersten Laut des Buchstabennamens abgeleitet. Ändert sich der Buchstabe, passt sich der Buchstabenname an. Das geschieht auch, als die Griechen um 800 vor Chr. die phönizische Konsonantenschrift mit Vokalen zu überschreiben begannen. Nachdem das anlautende /h/ verschwunden ist – und dies geschah schon in der Homerischen Zeit – wird aus 𐤇 (*heta*) ein E (*eta*), das fortan dem Buchstaben /e/ zugeordnet ist. Das akrophonische Prinzip haftet den Buchstaben an. Doch erst das griechische Alphabet abstrahiert und überträgt es auf die Zahlwörter. Erst hier kann in einem strengeren Sinn von einem Prinzip gesprochen werden. Wenn ein Winkel, 𐤀, bei den Semiten noch »Ochse« bedeutet, wenn ein Kreis mit innen liegendem Punkt, °, ein Auge, bezeichnet, ist jeder verallgemeinernder Zugriff fern. Die Griechen übernehmen zwar um 800 das phönizische Alphabet, aber ihr Vokalalphabet gründet auf einem produktiven Unverständnis. Die Griechen benutzen dieselben Merkverse wie die Semiten. Doch wenn sie die Alphabetreihe abschreiten, tauchen sie nicht mehr in dieselbe bunte Bilderwelt ein. Die Namen der Buchstaben sprechen nicht mehr. Das innere Auge bleibt blind: »*Alpu betu gamlu daltu*« ruft nicht mehr Ochse, Haus, Kamel[284] und Tür auf.[285] Die Griechen übernehmen die Buchstabenformen und auch die Buchstabennamen. Doch die Bedeutung der Namen ist ihnen abhanden gekommen.[286] Und dennoch ist dieses Vergessen für die Universalität des Alphabets von Vorteil. Ihnen verdanken die Griechen ihr Vokalalphabet. Der griechische Neuansatz, schreibt Burkert,

> der Fortschritt von der Konsonanten- zur prinzipiellen Lautschrift, beruhte zum großen Teil auf einem Missverständnis, das sich unmittelbar aus dem sorgfältigen Erlernen jener Alphabet-Strophe ergab.[287]

III II I

[282] Zu den 30 Zeichen, die das erste keilschriftliche Alphabet bilden und seinen syllabischen Ergänzungen durch die Zeichen /'i/ und/'u/ vgl. Otto Eißfeldt 1968: 230.
[283] Martin Nilsson 1952/1966: 177 f. Gary Miller 1994: 46.
[284] Dieser Buchstabenname ist nicht eindeutig zu übersetzen. Die Ambiguität verdankt sich der Konsonantenschrift. »Gimlu« ist das »Kamel«, »gamlu« aber meint den »Krummstab«.
[285] Und damit nicht wie bei Burkert der Eindruck eines *comic strips* (2003:27) entsteht, schränkt Powell ein, dass nicht alle semitischen Namen mit Bedeutungen belegt sind. Es sind 13 von 22 (Powell 1996 – 25).
[286] Walter Burkert 2003: 24-25.
[287] Walter Burkert 2003: 26. Vgl. dazu auch Powells ausführlichere Beschreibung in »The adapter and his informant, face to face« (Powell 1996: 25-27).

Die Linearschriften von Kreta und Zypern bleiben auf die Palast-Bürokratie beschränkt und sollten mit ihr untergehen. Auch die Keilschriften aus Ugarit – so verbreitet sie auch sein mögen – verschwinden um 1200 mit Stadt und Palast. Erst wenn man den das Haus, das Kamel, den Ochsen vergisst – der Buchstabe nicht mehr sieht und jeder Sinn aus den Buchstabennamen verschwunden ist, wird ein Übertrag möglich. Der Winkel bedeutet nun nicht mehr einen Knacklaut, sondern einen Vokal: α. Der Adapter, den Powell mit diesem produktiven Übertrag betraut, versteht nicht nur die Sprache nicht, deren Alphabet er lernt. Seine Ohren versagen ihm auch den Dienst. Denn diese Sprache kann er ebenso wenig hören, die Unterschiede in der phonologischen Struktur sind zu groß:

> The Greek adapter faced more difficulties than a native speaker of Phoenician because, even if the Greek knew some Phoenician, his ear, like our own, was ill-attuned to the different phonemes of Semitic speech,

schreibt Powell.[288] Der phönizische Informant kann ihm die Silben vorsprechen und auf seine Alphabetliste verweisen.[289] Wenn der Phönizier *samekh*, *sade* und *schin* sagt, zeigt er auf drei verschiedene Zeichen. Der Adapter sieht drei Zeichen, aber hört nur einen einzigen Laut, nämlich /*s*/. Da er nicht hören kann, muss seine Zunge ebenso fehlgeleitet sein: »Es erhellt schon«, schreibt Martin Nilsson,

> ...dass die vornehmlichste prinzipielle Neuerung der griechischen Schrift, die Vokalzeichen, durch welche erst das Alphabet zu einer wirklichen Lautschrift statt einer latenten Silbenschrift, wie das phönikisch-hebräische Alphabet, geworden ist, sich von selbst eingestellt hat, wenn das semitische Alphabet von einer griechischen Zunge gelernt und gesprochen wurde, wegen der eigentümlichen Verschiedenheit des griechischen Lautsystems von dem semitischen.

Nilsson reduziert den Adapter auf die Zunge. Aber das Übel nimmt seinen Ausgang von den Ohren. Nilsson zählt Missverständnisse auf, die allesamt von missgestimmten Ohren ihren Ausgang nehmen. Ein Konsonant wird durch den nächstähnlichen Laut ersetzt. So entsteht aus dem unhörbaren /*jod*/ der Vokal /*i*/.[290] Oder wie im Fall von /a/ und /e/ geschehen überhören die Ohren den Anlaut der semitischen Silben und erzeugen so aus Konsonanten Vokale.

> Gewisse semitische Konsonantenlaute fehlten im Griechischen. Wegen dieses Umstandes hat das akrophonische Prinzip von selbst den Griechen Vokalzeichen geschenkt.[291]

Missgestimmte Ohren leisten also den Übertrag von der phönizischen Silbenschrift zum griechischen Vokalalphabet: Sie ermöglichen eine Schrift, mit der man fast jede Sprachen sprechen kann, ohne dass man ihre Worte verstehen muss. Dem akrophonische Prinzip verdanken die Griechen einen Neuanfang. An

III II I

[288] Barry B. Powell 1996: 25. Dazu auch Martin Nilsson 1952: 180.
[289] Vgl. Barry B. Powell 1996: 21.
[290] Martin Nilsson 1952: 180.
[291] Martin Nilsson 1952: 180-181.

seinem Ende steht die akrophonische Zahlschrift. Über die Universalisierung des Übertrags lässt sich auf den Schultern Burkerts schreiben: Auch die akrophonische Zahlschrift beruht auf einem Missverständnis, das sich unmittelbar aus dem sorgfältigen Erlernen des Vokalalphabets ergibt. Denn nicht die Reihe der Buchstabennamen wirkt hier so produktiv. Jedem Wort wohnt ein akrophonischer Neubeginn inne. Jedes Wort kann über Buchstaben gemerkt werden. Die akrophonische Zahlschrift löst sich vom semitischen Merkvers. Sie betreibt *reverse engineering*. In der Tat ist der Buchstabe tot. Kein Bild wohnt mehr unter seinem Dach. Nicht mehr die Buchstaben müssen gemerkt werden, sondern Zahlwörter und Zahlenwerte. An die Stelle von »Stier – Tür – Haus« tritt »1 – D – H«. Denn die Buchstaben selbst sind der Merkvers. Unter der Führung des Lautsystems entsteht so ein Zahlsystem, dass zwar memoriert werden kann, aber auf keine Semantik mehr angewiesen ist. Hier mag ich nur kurz auf den Zeichensatz der akrophonischen Zahlschrift eingehen, um dann sogleich ihre Verwendung und Datierungen genauer zu diskutieren.

Wie also sieht die Zahlschrift aus? Sie besteht aus fünf Zeichen:

Γ	5
Δ	10
H	100
X	1000
M	10000

Diese fünf Zeichen werden durch vier zusammengesetzte akrophonische Zeichen ergänzt. Ihnen liegt die Fünferbündelung zugrunde. Die Zahlzeichen bestehen aus zwei Buchstaben. Alle Zahlen, die der Buchstabe Γ umfasst, werden mit 5 multipliziert.

𐅄	5· 10
𐅅	5 · 100
𐅆	5 · 1000
𐅇	5 · 10000

Die akrophonische Zahlenschrift hat also additive und multiplikative Elemente. Es ist ein Dezimalsystem und besteht in der attischen Form aus neun Zeichen. Die Zeichenvergabe ist regional unterschiedlich. Sie richtet sich nach den Dialekten, aber auch nach den regional üblichen Alphabetzeichen. Die Fünferbündelung ist nicht unbedingt vollständig vollzogen. Doch die dezimale Ordnung ist überall wirksam. Die Gemeinsamkeiten überwiegen, so dass die akrophonische Zahlenschrift als System unverändert bleibt und eine gemeinsame Wurzel für alle Varietäten nahe liegt.

Über einen Außenseiter

Nur ein Zeichen steht außerhalb der akrophonischen Ordnung. Es bezeichnet die Einheit des Zahlsystems. Nicht mehr als ein Riss, eine Linie, wird zum Grundelement des Zahlsystems, mit dem die Proportionen auf den ionischen Tempel so anschaulich auf dem Rechenbrett dargestellt werden können.

|

bedeutet Eins. Eins ist keine Zahl und insofern ist ihr Name auch kein Zahlwort. Warum steht die Eins so sichtbar außerhalb der alphabetischen Ordnung? Was ist der Status von |? Über das *Eins-sein* schreibt Aristoteles:

> Das Eins-sein ist Prinzip für etwas, eine Zahl zu sein; denn das erste Maß ist Prinzip.[292]

Das Prinzip steht außerhalb jeder Ordnung. Nicomachus schreibt es wie ein privatives Präfix mit Α an.[293] | steht für Einheit. Die Einheit bezeichnet den Anfang aller Zahlen. Sie zählt, ohne selbst Zahl zu sein:

> Die Einheit nimmt den gleichen Platz wie der Punkt ein. Sie teilt seine Eigenschaften. Sie ist der Beginn aller Abstände [diasthma] und Zahlen, ohne selbst Abstand und Zahl zu sein.

schreibt Nicomachus. Und mit dem Verweis auf Punkt und Linie und Fläche schließt er:

> Die Einheit ist also elementar. Sie besitzt keine Ausdehnung.[294]

Der letzte Zusatz klingt euklidisch. Aber die Einheit folgt weniger der Axiomatik der *Elemente* als der Logik der Rechensteine. Mit einem Rechenstein kann weder eine Fläche, noch ein Winkelhaken gelegt werden. Darum besitzt die Einheit keine Dimension. Erst zwei Rechensteine erzeugen eine Linie und drei einen Winkelhaken. So sind die Ausführungen zu Punkt und Linie auch weniger euklidisch. Es verhält sich vielmehr umgekehrt. Die Euklidischen Definitionen zu

[292] Aristoteles: Metaphysik 1016b 15.
[293] Vgl. Nicomachus v. Gerasa Arithmetik: II 6,2.
[294] Beide Zitate Nicomachus v. Gerasa Arithmetica: II 6, 3.

Punkt und Linie verweisen auf den Anteil der Rechensteine in der Axiomatik. Sie bezeugen, dass Geometrie und Arithmetik im 6. Jahrhundert über den Abakus in einer nahen Vergangenheit einmal untrennbar miteinander verbunden waren:

> Auf dem Punkt gründet jede Ausdehnung, aber er selbst besitzt keine Ausdehnung; ebenso begründet er die Linie, ohne selbst Linie zu sein. (...)

Analog fügt Nicomachos gleich im Anschluss an:

> Das gleiche gilt für die Zahlen, die Einheit ist der Anfang aller Zahlen, wenn sie Einheit für Einheit anwachsen und nur eine Ausdehnung besitzen; die linearen Zahlen sind der Anfang aller Flächenzahlen...[295]

Die linearen Zahlen entstehen aus zwei Rechensteinen, die Flächenzahlen wählen drei Rechensteine zur kleinsten Einheit.[296] Strecken und Dreieckszahlen sind die Elemente der figurierten Zahlen.

Die akrophonischen Zahlen, so zeigt sich, gedeihen im Schatten der figurierten Zahlen. Die Einheit der akrophonischen Zahlschrift ist exponiert. Sie begründet zwar das Zahlsystem. Und dennoch ist sie das einzige Zeichen, das außerhalb des akrophonischen Prinzips steht. Die Ordnung der akrophonischen Zahlschrift folgt so einem Zeichen, dass weniger dem Alphabet als der additiven Logik des Rechensteins entspringt. Blickt man von hier noch einmal auf den Beweis, den Pythagoras mit Rechensteinen vollzogen haben soll, so ist I auf dem Rechenbrett der Zwilling des Ecksteins. Wer auf wen verweist, der Eckstein auf das Zahlzeichen oder umgekehrt, das kann nicht entschieden werden, weil Eckstein und Zahlzeichen historisch nahezu gleichzeitig auftauchen. Doch nachdem der Zahlenvorrat vorgestellt worden ist, soll schließlich noch auf die zusammengesetzten Zahlen verwiesen werden.

Die Einheit gibt die Ordnung vor. Die Zahlen werden additiv gebildet. Sie sind dezimal kodiert. Eine Fünferbündelung findet man nicht durchgängig für alle Zehnerpotenzen, aber weitestgehend. Zum Beispiel wird die Zahl 73.456 mit akrophonischen Zahlzeichen zu

𐅇 ·Μ Μ Χ Χ Χ Η Η Η Η 𐅄 Γ Ι ·

1·50.000+2·10.000+3·1000+4·100+5·10+1·5+1

Und die Zahl 249.999 schreiben die Griechen mit akrophonischen Zahlen

𐅇𐅇𐅇𐅇Μ Μ Μ Μ 𐅆Χ Χ Χ Χ 𐅅 Η Η Η Η 𐅄 Δ Δ Δ Δ Γ Ι Ι Ι Ι.

Diesen Haufen Zahlen will man nicht von 𐅇𐅇𐅇𐅇Μ Μ Μ Μ 𐅆Χ Χ Χ Χ 𐅅 Η Η Η 𐅄 Δ Δ Δ Δ Γ Ι Ι Ι Ι unterscheiden. Große Zahlen erzeugen Zahlenmonster, zumal die akrophonische Zahlenschrift keine Rückzählung kennt. Und wenn die

I I I I I I

[295] Nicomachus v. Gerasa Arithmetica: II 7,1+3.

[296] Vgl. Nicomachus v. Gerasa Arithemtica: II 7,3.

Fünferbündelung – wie im 6. Jahrhundert – nicht für alle Dezimalstellen verwendet wird, so werden die Zeichencluster noch unübersichtlicher. Obwohl die akrophonische Zahlenschrift auf dem Alphabet beruht, ist sie kaum, für die Augen des Lesers bestimmt. Sie ziert keine Münzen. Sie wird nicht kardinal verwendet wie die Buchstabenzahlen. Sie dient allein dazu, die Kolumnen des Rechenbretts zu bezeichnen. Das Rechenbrett aber hat einen begrenzten Operationsradius. Es konzentriert sich auf die Berechnung von Gewichten, Massen und Geldbeträgen. Übersichtlichkeit und Lesbarkeit sind nicht ihre Sache. So mag man vermuten, dass der akrophonische Zeichenvorrat wenig zum Rechnen taugt.

Über die Buchstabenzahlen und eine neue Unterscheidung

Die Buchstabenzahlen machen von der Alphabetreihe Gebrauch. Sie zergliedern die Alphabetreihe in 3 · 9 Buchstaben. Mit ihnen schreiben sie die 1er, die 10er und die 100er an. Dazu nutzen sie das griechische Alphabetreihe, die sie durch drei ältere Zeichen ergänzen: F für 6, ϙ für 90 und ϡ für 900. Es sind Zeichen des phönizischen Alphabets, die beim Übertrag von der semitischen Silbenschrift zur Lautschrift der Griechen funktionslos blieben. Auf 27 Buchstaben können alle Zahlenwerte bis 1000 mit 3 Zahlen angeschrieben werden. Man geht wohl nicht fehl, wenn man selbst die Buchstabenzahlen geometrisch liest. Denn bei den Pythagoreern ist nicht nur alles Zahl, sondern jede Zahl steht zugleich für eine Figur. So mag man schon allein aus mnemotechnischen Gründen annehmen, dass die Buchstabenzahlen mit drei Quadraten angeschrieben werden [Fig. 32]. Die Quadrate besitzen die Seitenlänge 3. Die Ecksteine nehmen jeweils den Wert 3, 30 und 300 ein.

● ● +1	α β γ	ι κ λ	ρ σ τ
● ● ●	δ ε δ	μ ν ξ	υ φ χ
● ● ●	ζ η θ	ο π ϟ	ψ ω ϡ
	1-9	10-90	100-900

Fig. 32 – Die Buchstabenzahlen in einer memorierbaren Anordnung, die eine bedingte Dezimalkodierung erlaubt (G. M.)

Während die akrophonischen Zahlen das Zeichen I zur Einheit wählen, liegt den Buchstabenzahlen die Zahl 3 zugrunde. Darum können die Pythagoreer die Harmonien mit ihnen gut anschreiben. Denn ihre Einheit, 3, ist die Einheit der Dreieckszahlen und der Tektraktys.

Wie verhalten sich die akrophonischen Zahlen zu den Buchstabenzahlen? Vielfach wird vermutet, die akrophonischen Zahlenzeichen gehen den Buchstabenzahlen voraus.[297] So unterscheidet auch Menninger zwischen einer »frühen Zahlschrift, die reihte und bündelte«, und »der gelehrte[n] Zahlschrift der Abc-Ziffern«.[298] Und schon hier wird sichtbar, wie Menninger mit der Chronologie eine Wertung verbindet. Die Buchstabenschrift ist »gelehrt«, die akrophonische Zahlschrift noch wenig ausgereift. Zwar plagt die Archäologie ein chronischer Quellenmangel. Und dennoch deuten ihre Funde an, dass die alte Chronologie kaum haltbar ist. Für die akrophonischen Zahlzeichen stammt der früheste Fund von der ionischen Küste Kalabriens aus Kaulonia: einer griechischen Kolonie im Einzugsbereich von Kroton. Sie wird im 6. Jahrhundert gegründet. Die Zahlen aus Kaulonia sind um 530 entstanden.[299] Zur gleichen Zeit wird Kroton zum Wohnort von Pythagoras und zum Sitz seiner Schule. Die Buchstabenzahlen sind mindestens genauso alt. Der früheste Fund ist eine Gebäudeinschrift in Posidonia, das spätere Paestum. Die Buchstabenzahlen tauchen vermutlich um 580-570 v. Chr. zum ersten Mal auf.[300] Sie scheinen knapp 50 Jahre vor der akrophonischen Zahlschrift zu existieren. Aber diese geringe Differenz sagt nicht viel.

Die Verwendung der Zahlsysteme ist sprechender. Sie folgt einer Unterscheidung. Während die Buchstabenzahlen ordinale Funktionen übernehmen, werden die akrophonischen Zahlen meist kardinal verwendet. Die akrophonischen Zahlzeichen zählen die Kolumnen des Rechenbretts. Die Buchstabenzahlen zählen die Homerischen Gesänge. Sie bezeichnen die Harmonien, die Linien der Diagramme. So beruht auf ihnen das Verweissystem der deduktiven Geometrie. Manchmal spiegelt sich in der funktionalen Teilung die Ordnung der Schreibfläche wieder. So geschieht es z.B. am Anfang jener Papyrusrollen, die man bei Herculaneum gefunden hat, und die um 50 v. Chr. geschrieben sein müssen. Der Beginn dieser Rollen bezeichnet die Anzahl der Bü-

III II I

[297] Wilhelm Larfeld 1907: I 426; Alfred Nagl 1914: 28, 30; Ifrah 1991: 548. Calinger 1999: 80.
[298] Karl Menninger 1979: II 73.
[299] Vgl. Margherita Guarducci 1967: I 418.
[300] Margherita Guarducci 1967: I 426. Alain Schärlig 2001: 56.

cher mit Buchstabenzahlen, die Zeilenzahl aber wird – wie die Kolumnen des Rechenbretts – mit akrophonischen Zahlzeichen notiert.[301]

Ist die ordinale Verwendung von Zahlen also ein wenig älter als die kardinale Verwendung? Man darf es bezweifeln und den zeitlichen Unterschied der Quellenlage zuschreiben. Ein Beispiel habe ich schon im letzten Kapitel angeführt. Die arithmetischen Reihen, die man auf Samos in der Architektur der Tempel findet, beruhen wahrscheinlich auf den akrophonischen Zahlzeichen. Denn nur auf dem Rechenbrett und mit den akrophonischen Zahlzeichen lassen sich die größten gemeinsamen Teiler einfach finden. Das lässt zwei Schlüsse zu: Es gibt zwar zwei Zahlsysteme: doch sie sind annähernd zu gleichen Zeit entstanden, nämlich um 580. Die Zahlsysteme sind zweitens wahrscheinlich als System entstanden. Sie führen eine Unterscheidung ein: Ordinalität und Kardinalität. Die Unterscheidung der Buchstaben nach »Anordnung« (Ordinalität) und »Lage« (Kardinalität) findet in diesen Zahlsystemen ihren ersten Niederschlag. Es zeigt sich also, dass frühestens um 580 das Alphabet nicht mehr Inschrift ist, sondern als Reihen- und Elementschrift gedacht werden kann.

Man kann schlecht beweisen, dass die Pythagoreer die akrophonischen Zahlzeichen erfunden haben. Trotzdem folgen die figurierten Zahlen, die Geometrie der Gegenseite und die Anlegung der Flächen ihrer Logik. Die akrophonischen Zahlen werden zuerst auf dem Rechenbrett verwendet. Danach werden sie recht schnell zum Instrument abstrakterer Zahlenspiele. So gründet die Lehre vom Geraden und Ungeraden auf ihnen. Und auch die figurierten Zahlen, die Dreiecks- und Quadratzahlen, mit denen Pythagoras seinen induktiven Beweis aufstellt, gründen auf den Kolumnen des Rechenbretts. Sie bedienen sich der Ordinalität der akrophonischen Zahlen. Die pythagoreischen Zahlsteine sind zwar noch immer Anzahl. Doch ihre Anordnung wird immer wichtiger. Der Eckstein nutzt die Anordnung der Rechensteine. Er beruht in dieser Hinsicht auf den akrophonischen Zahlen, weil die Anordnung zunächst auf dem Rechenbrett ins Auge fällt. Das wurde oben gezeigt. Kurze Erwähnung fanden auch die gleichschenkligen Dreiecke, die die Einheit des Winkelmaßes wiederum zur Einheit machen, um in gleicher Weise mit Dreiecken wie mit Rechensteinen zu operieren. Die Beweise, die sich um die Verdopplung des Quadrates gruppieren, veranschaulichen dies. Die Harfenseite jedoch ist das erste Indiz, das die »Lage« der »Anordnung« den Rang abläuft. Die Rechensteine, die auf der Einheit »I«
III II I

[301] Sir Thomas Heath 1953: 1 35.

beruhen, werden nun endgültig gegen Buchstaben eingetauscht. Das Raster des Rechenbretts, das den figurierten Zahlen immer noch inhärent ist, wird durch das beschriftete Diagramm ersetzt. Denn die Gegenseite widersetzt sich der Zählbarkeit. Sie hat sich auch vom Raster der Kolumnen befreit. Die Gegenseite ermöglicht es, Abstraktion und Idealität zu denken. Die Zahlsysteme stehen für zwei verschiedene metrische Systeme. Die Anzahl setzt auf die Einheit »I«, das Unsagbare wählt den Winkelhaken, 3, als oder vielmehr I+I+I als kleinste Einheit. Denn die Seitenlänge des Gnomon bleibt I. Auch wenn die Datierung unklar bleibt und kein Adapter für die Erfindung der Zahlsysteme namhaft gemacht werden kann, so zeigt dennoch die funktionale Differenzierung, wie die Buchstabenzahlen an den Rändern des Rechenbretts zum Medium der Bildlosigkeit werden konnten. Dabei schreiben sich die Buchstabenzahlen in die Raster der Rechenbretter ein, indem sie zunächst über die induktiven Rechensteinbeweise und das Einheitswinkelmaß versuchen das Unsagbare zu disziplinieren, indem sie die erste Primzahl selbst zur Einheit des Systems erklären.

Pythagoras ist nicht nur mit den neuen Zahlsystemen groß geworden. Er muss einen spielerischen Umgang mit Rechenbrett, Kieselsteinen und Buchstabenzahlen gehabt haben. Dieser Umgang ermöglicht es ihm, den Abakus gegen seine ursprüngliche Verwendungsweise zu benutzen, die Anzahl mit der Anordnung zu verknüpfen. Bei Hippokrates und Archytas verabschiedet sich das beschriftete Diagramm auch von der Anordnung. Die Arithmetik der Flächen, die geometrische Algebra, setzt vollständig auf die Lage. Die Lage aber braucht die Sichtbarkeit nicht. Denn Buchstaben können nicht aussteigen. Sie tragen immer einen Index ihrer Lage. Die Flächen können jede Gestalt annehmen, wenn ihre Fläche nur den Proportionen der Ähnlichkeit entspricht. Wenn die Buchstabenzahlen nicht der akrophonischen Zahlschrift vorausgehen, so wartet eine Lücke im System. Und die akrophonische Schrift hat sie geschlossen. Erst als die Kolumnen im Abakus adressierbar wurden, konnten die Pythagoreer den Abakus zum Ursprung der deduktiven Geometrie machen. So mag man vermuten, dass ein gewisser Hinsicht Boethius doch Recht hat, wenn er die Erfindung des Abakus Pythagoras zuschreibt. Denn es hat den Anschein, dass die akrophonischen Zahlzeichen in Griechenland nur eingeführt werden, um das Diagramm auf den Schultern des Rechenbretts zu begründen. Darum war ihnen auch kein langes Leben in Griechenland beschieden.

Ein letzter Auftritt der akrophonischen Zahlen

Im 1. Jahrhundert v. Chr. Verschwinden die akrophonischen Zahlen allmählich und die Erinnerung an sie verblaßt. Und davor findet man sie auf dem Rechenbrett. Was kann man aus dem kurzen Leben der Zahlen schließen? Warum werden sie entdeckt und wenige Jahrhunderte später ignoriert? Die deduktive Geometrie mag sie benutzt haben, um sie sogleich zu entsorgen. Für die Arithmetik sind sie entscheidend, weil sie den Übertrag selbst zur Grundlage der Zahlenbewegung machen. Die Ordinalität der Buchstabenzahlen begründet das Diagramm und verpflichtet die Geometrie auf Visualität. Der protokollierte Zeichenübertrag setzt eine bildlose Mathematik in Gang, die jede Zahlenbewegung als Zeichenübertrag formalisiert. Darum will ich im folgenden kurz schildern, wie die Griechen auf dem Rechenbrett den Übertrag erfinden.

Wo die Kürze der Buchstabenzahlen das Auge schont, setzt das akrophonische Zahlsystem auf Wiederholung. Es ermöglicht so den mühelosen Umgang mit den Rechensteinen. Dies allein liegt schon in der Architektur der Zahlsysteme begründet. Auch wenn die dezimale Ordnung der Buchstabenzahlen durch die Anordnung hergestellt ist, in den Zeichen selber spiegelt sie sich nicht wieder. Ein Beispiel: Die Zahlen 7, 70 und 700 werden ganz unterschiedlich von den beiden Zahlsystemen kodiert:

7	ΓII	Z
70	𐅃ΔΔ	O
700	𐅄HH	C

Fig. 27 – Die Zahlensysteme und die dezimale Ordnung im Vergleich

Die indisch-arabischen Ziffern und die akrophonischen Zahlen heben sich von den Buchstabenzahlen ab. Denn die Buchstabenzahlen verwenden drei vollkommen unterschiedliche Zeichen, die nicht ineinander überführbar sind. Das ist ein Tribut die Alphabetreihe, die mechanisch die Zahlzeichen vergibt. Die Buchstabenzahlen müssen darum ähnlich wie die Buchstaben über einen Merkvers beim Schreiben memoriert werden. Ganz anders die akrophonische Zahlschrift. Dort schlägt die dezimale Ordnung auf die Zeichengebung durch. Gerade bei den zusammengesetzten Zeichen, der Fünferbündelung (Γ, 𐅃, 𐅄, 𐅅 und 𐅆), wird die dezimale Ordnung in den eingeschriebenen akrophonischen Zahlzeichen sichtbar. Die pythagoreischen Tafeln zeigen noch deutlicher, wie sehr die Zeichengenerierung der Buchstabenzahlen von jener der akrophonischen

Zahlenschrift abweicht. Eine Additionstafel, die auf den griechischen Buchstabenzahlen beruht, verlangt 135 verschiedene Zeichenkombinationen. Für eine Multiplikationstabelle werden bereits 378 verschiedene Zeichenkombinationen gebraucht.[302] Ganz anders die die akrophonischen Zahlen: Sie bemühen zwar mehr Stellen, um Zahlen anzuschreiben. In dem überschaubaren Zahlenbeispiel brauchen sie schon dreimal mehr Stellen als die Buchstabenzahlen. Doch der größere Platzverbrauch wird durch eine zweite Ökonomie der Zeichen wettgemacht. Bei den akrophonischen Zeichen werden alle Kombinationen aus 9 Zeichen gebildet. Sie treten gegen die Übermacht der 27 Zeichen der griechischen Buchstabenzahlen an. Doch erst die indisch-arabischen Zahlen verbinden die Vorzüge beider Zahlsysteme: die kurze Anschreibung mit den Vorteilen der dezimalen Ordnung.

Die akrophonischen Zeichen werden selten verwendet und sind im 1. Jahrhundert vollständig fast vollständig verschwunden. Auch wenn also Dysfunktionalität und kurze Verwendungsdauer ihre Unbedeutendheit schon besiegelt haben, so haben sie dennoch an einem Ort dauerhafte Spuren hinterlassen: auf dem Rechenbrett. Dort scheinen sie den Sieg über die Buchstabenzahlen längst davongetragen zu haben. Dieser Zeichenvorrat ist um ein Dreifaches kleiner als die Anzahl der Buchstabenzahlen. Wiederholung ist darum bei den akrophonischen Zahlen unvermeidlich. Die Buchstabenzahlen unter 1000 werden maximal mit 3 Stellen gebildet. Die akrophonischen Zahlzeichen arbeiten dagegen mit 27 Stellen, wenn die Fünferbündelung nicht verwendet wird. Und dennoch ist gerade die additive Generierung von Zahlen, die auf Redundanz setzt, hier von Vorteil. Sie ist sperrig. Jeder Blick wird von ihren Wiederholungen ausgebremst. Trotzdem kann man gerade mit der Wiederholung Eigenschaften kodieren – sie ist ein eigener Parameter, der die Reihenfolge der Zahlen gliedern kann. So lassen sich etwa 10er-Potenzen durch Wiederholung und Variation leicht markieren. Die dezimale Ordnung schreibt sich durch Wiederholung in den Zahlenvorrat ein. Das lässt Rückschlüsse auf die Schreibflächen zu, wenn auch die Abhängigkeiten sich umkehren. Denn diese Flächen richten sich nicht nach dem Zahlenvorrat. So sehr die akrophonischen Zahlzeichen ihr Prinzip dem Alphabet verdanken, so wenig erinnern ihre Operationen an die Effizienz des Vokalalphabets. Und es scheint, als seien diese Zahlen kein Nebenprodukt der Schrift. Denn die additiven Zahlsysteme sind nicht für den Blick optimiert. Ihre
III II I

[302] Louis C. Karpinski/Francis E. Robbins 1926: 69.

dezimale Ordnung ist nicht den Fingerzahlen abgeschaut. Stattdessen folgen sie der Logik der Tabelle, den Spalten des Abakus'. So kann man schließen, dass die Griechen die ebene Fläche nicht nur mit den akrophonischen Zahlen erkunden, sondern die Zweidimensionalität zwischen und mit der Zahlenbewegung zwischen den Spalten des Abakus erfinden.

ÜBER DIE OPERATIONEN DER RECHENFLÄCHE

Über einen namenlosen Zahlmeister und die Namen des Rechenbretts

Keinem Handbuch kann man entnehmen, wie auf Staubtafeln gezeichnet und auf Rechenbrettern gerechnet wird. Die Tafeln sind stumm. Die Rechensteine meist nicht erhalten. Nur Abbildungen zeigen den antiken Gebrauch des Rechenbretts. Eine frühes Bild stammt aus einem Grab von Canossa (Fig. 34). Es ist ein Volutenkrater, der fast 1,40 m hoch ist. Diese gewaltige Vase diente zum Mischen von Wasser und Wein. Sie ist um die Figur des Dareios konzentriert, wie eine rote Schrift auf schwarzem Grund verrät. Die Darstellung geht vermutlich auf eine verschollene Tragödie von Phrynichos zurück und zeigt auf vier Bändern Szenen vor den Perserkriegen.[303] Dareios auf seinem Thron ist umgeben von seinem Hofstaat, von Boten und Kriegern. Er thront zwischen seinen Untertanen. Vor ihm steht eine sorgenvolle Gestalt, die eine Schrift als Perser ausweist. Sie mag ihn warnen, gegen die Griechen in den Krieg zu ziehen. Doch über Dareios thronen die Götter: Zeus, der die Bedrohung sieht und Hellas schützt, und Apathe, die Mutter Aphrodites. Unter Dareios hingegen, direkt zu seinen Füssen, befinden sich die Stützen seiner Macht. Es ist ein Tisch mit drei Beinen, ein schlichter Tisch, kein Prunktisch. Die Pracht des Throns teilt er nicht. Und dennoch wandern über ihn der Sold der Soldaten und der Reichtum von Dareios. An diesem Tisch sitzt ein Mann, der seine Füße wiederum auf einen Tisch stützt. Der Mann muss nicht darben. Mit der linken Hand hält er Wachstafeln, mit der rechten ordnet er Münzen. Die Münzen stammen aus einem Sack. Der Sack ist so groß, dass ihn nur die vereinte Kraft zweier Arme heben kann. Der Mann, der nicht darben braucht, ist ein Schatzmeister. Die Arme, die den Geldsack halten, gehören einem Vasallen. Der Vasall zollt Tribut. Die Stütze von Dareios' Macht ist ein Abakus. Griechische Zahlzeichen beschriften den Abakus, aber Linien findet man nicht. Kein sichtbares Zeichen verweist darauf, dass die Tischplatte auch als Tabelle genutzt werden kann. Und dennoch zeigt die Verteilung der Münzen, dass

[303] Nationalmuseum Neapel 1995: 93.

Fig. 34 – Dareios und der Zahlmeister, Volutenkrater aus einem Grab von Canossa, 340-320 v. Chr., Nationalmuseum Neapel (Heymann 1995).

über die Tischplatte ein unsichtbares Netz von Linien und Spalten herrscht.[304] Der Schatzmeister lebt in einer Armut, die kein Geld beseitigen kann. Seine Augen

III II I

[304] Hultsch sollte in einem wenig mathematischen Artikel zum Abakus darauf hinweisen, dass der Tisch, den die Dareiosvase zeigt, kein Rechenbrett, sondern ein Zahltisch sei. Nagl antwortet ihm im Nachtragsband: »Die Deutung als Zahltisch ist irrig«. Er deutet die Zahlzeichen der Tischplatte als Kolumnenbezeichnungen. Nagl verweist auf die Tafel aus Eleusis (Praktika, Athen 1885, S. 72). Er zeigt auf, dass auch Abaci ohne Linien als Rechenbretter genutzt wurden, sofern die Zählsteine unter den Zahlzeichen in Reihe gelegt werden. Man kann jedoch – so legen es die Quellen nahe –

sind beständig auf den Geldsack gerichtet. Denn er besitzt weder Rechensteine, noch Münzen. So wartet er, dass der Vasall die Münzen auf den Zahltisch legt, damit er sie in Linien, Zeilen und Spalten, anordnen kann. Die Bedeutungen, die Georges dem Wort *abacus* zuschreibt, finden sich alle im Tisch des Schatzmeisters wieder. Der Abakus des Schatzmeisters ist »Tischplatte«[305], »Rechenbrett« und »Abecetisch« zugleich, weil er seine Zahlen aus dem griechischen Alphabet entnimmt.[306] Aber was hat es genauer mit diesen Bedeutungen auf sich? Welche von ihnen steht am Anfang?

Die Wortgeschichten, die den Abakus begleiten, treiben zuweilen bizarre Blüten. Die kurioseste Deutung findet sich bei Ioannes de Muris, von dem einige Traktate zur Kalenderrechnung, aber auch eine Arithmetik überliefert sind. Er liest *abacus* als Eigennamen des Erfinders.[307] Eine andere Deutung, die bis auf

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

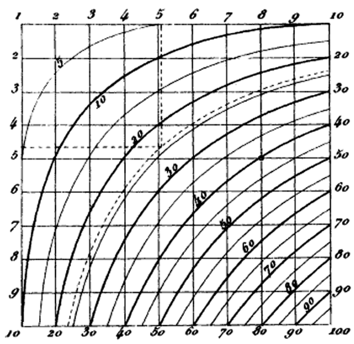


Fig. 35 – Pouchet übersetzt die pythagoreische Tafel in eine Hyperbelschar, Léon Lalanne, 1846.

III II I

von sehr unterschiedlichen Nutzungen des Abacus ausgehen. Der Abacus durchläuft eine nicht immer linear geordnete Karriere vom Prunktisch über den Zahltisch zum Rechengerät. Geht man hiervon aus, so mag es bei den Zäsuren auch uneindeutige Doppelnutzungen gegeben haben, die sich nicht widersprechen müssen. Offensichtlich ist der Tisch des Schatzmeisters ein Zahltisch. Der Geldsack des Untertanen deutet darauf hin. Dass er aber als Zahltisch zugleich der Summierung von Posten dient, schließt sich nicht aus. Hultsch: Abakus. RE Bd 1. Alfred Nagl: Abakus. RE Supplementband 3, 11.

[305] Livius erzählt, wie nach dem Sieg über Gallien der Feldherr Manlius Volso der Abacus nach Rom kam. »Abacus« bezeichnet hier jedoch nicht ein Rechenbrett, sondern einen Prunktisch, auf dem kostbare Gegenstände zur Schau gestellt worden sind. »...die fremdländische Üppigkeit wurde von dem Heer aus Asien in Rom eingeschleppt«, schreibt Livius. »Diese brachten zuerst Speisesofas mit Bronzefüssen, kostbare Teppiche, Vorhänge und andere Gewebe und, was damals als prächtiges Hausgerät galt, Tischchen mit einem Fuß (*monopedia*) und Prunktische (*abaci*) nach Rom«(T. Livius: Römische Geschichte. XXXIX 6,7. Hg. v. Hans Jürgen Hillen. Darmstadt 1993. Bd. 9) Auch wenn der Abacus als Prunktisch schon vor 187 v. Chr. in Rom zu finden war, die Verwendungen des Wortes »abacus« für Prunktisch werden nach Livius Legion. Zur Verwendung des Abacus als Prunktisch siehe auch Nagl 1918.

[306] Georges I 1998: 6.

[307] Zit. n. Smith II 1953: 156 Fn 3.

den heutigen Tag geläufig ist,[308] findet in Abakus die Ableitung von *abaq*, dem semitischen Wort für »Staub«. Sie mag darin die früheste Bedeutung des Abakus als Staubtafel finden. Aber auch das lässt sich sprachgeschichtlich nicht erhärten.[309] Eine dritte Lesart, die ebenso sinnfällig ist, buchstabiert und formt um. Sie zersetzt das Wort Abacus in α', β' + αξια. Sie entdeckt in αβαξια den Anfang der griechischen Zahlenbuchstaben: α und β. Die Endsilbe -αξ verweist auf αξια. Das altgriechische Wort für »Preis« und »Wert« achtet darauf, dass α und β nicht als Buchstaben, sondern als Zahlen gelesen werden. Und Soreau, der Autor dieser Lesart, säumt nicht zu erklären, dass der derart entschlüsselte αβαχ analog zu αλφαβητος als Zahlenintellektueller gebildet sei. Soreau interpretiert den Abakus als Zahlentafel. Er ist ein numerisches Abecedarium: »un simple tableau alphabétique des nombres«. Auf dieser Tafel, so erläutert Soreau, sei die alphabetische Ordnung der 27 Buchstaben in drei Spalten und neun Zeilen in die dezimale Ordnung des Rechenbretts überführt.[310] Dass Soreau über diese buchstäbliche Deutung das Rechenbrett an die Geschichte des griechischen Alphabets anschliesst, hat einen einfachen Grund. Rodolphe Soreau ist Ingenieur und in den Ingenieurswissenschaften einer neuen Hilfswissenschaft verpflichtet: der Nomographie. Poncelet, Ingenieur und Offizier der Napoleonischen Armee, bringt 1814 den Abakus aus russischer Gefangenschaft von Saratov nach Metz. Von dort verbreitet er sich innerhalb weniger Jahre an den europäischen Volksschulen.[311] Doch die Mongeschüler Poncelet, Lallemand und Lalanne wollen nicht die Schulbildung erneut dem Regime des Rechenbretts unterwerfen. Der Abakus aus Saratov wird vielmehr zum Beginn einer Technik, die umfangreiche Tabellenwerke und das Lösen von linearen Gleichungen durch eine einzige gitterförmige Tafel ersetzt. Während das Rechenbrett in den Volkschulen, erneut das Rechnen auf Papier durch die Geschicklichkeit und Schnelligkeit des Handrechnens ersetzt, mechanisieren in den Ingenieursschulen die Nomogramme die Algebra. Einen ersten Schub für die graphische Anschreibung der linearen Algebra bringt 1795 die Einführung des metrischen Systems. Die Einführung des

III II I

[308] Friedrich Naumann 2001: 31 und Reviel Netz 2002: 344.
[309] Hjalmar Frisk 1960: 13.
[310] Rodolphe Soreau 1918: 68.
[311] I. A. Apokin 2001: 24.

Meters verlangt nach einer einfachen Methode, die alten Längenmaße umzurechnen. Ein Baumwollfabrikant aus Rouen, Louis Ézéchiel Pouchet, der auch die mechanischen Webstuhl von England nach Frankreich einführte, legt seiner neuen graphischen Tafel eine Multiplikatikationstafel zugrunde. Sie übersetzt die Spalten und Zeilen der pythagoreischen Tafel in eine Schar von Hyperbeln [Fig. 30].[312] Nur wenige Jahrzehnte später müssen die Ingenieure beim Eisenbahnbau Bodenprofile berechnen. Das Bedürfnis, lineare Gleichungen mechanisch zu lösen, wird durch Kanal- und Festungsbauprojekte, sowie die Anfertigung topographischer Karten verstärkt. Für den Eisenbahnbau und die Bodenprofile des Legrand-Sterns rund um Paris erhalten Léon Lalannes Tabellen 1842 den Zuschlag. Gegen Pouchet, der die cartesische Ordnung für seine Multiplikationstabellen nutzt, setzt er eine *géométrie anamorphique*. Diese Geometrie, die aus der Verzerrung Nutzen schlagen will, hat er der Seenavigation abgeschaut.[313] Mercator hat das logarithmische Netz 1569 zuerst für das Gitternetz seiner Weltkarte verwendet. Er hat jedoch verschwiegen, mit welchem Werkzeug er die Längengradtafel konstruiert. Genau das bemängelt Lalanne.[314] Und dennoch verdankt seine *géométrie anamorphique* die entscheidende Funktion, dreidimensionale Flächen auf die Zweidimensionalität von Tafelflächen zu reduzieren, nicht Descartes, sondern den wachsenden Breiten der Mercatorprojektion. Lalannes Geometrie beginnt dort, wo Mercator endet. Ihre Aufgabe besteht darin, Kalküle zu entwickeln, mit denen der Maßstab der Achsen derart gewählt werden kann, dass die Hyperbeln durch Geraden ersetzt werden können. Diese Tafeln nennt Lalanne explizit in Anlehnung an die griechischen Rechenbretter *abaque*.[315] Nicht nur das gitterförmige Netz, das der pythagoreischen Tafel ähnelt, bringt ihr diesen Namen ein, sondern auch ihre Handhabung – ein einziger Blick befreit die Ingenieure und Handwerker, Gleichungen mit mehreren Variablen mit Papier und Tinte auszurechnen. Diese Tafel ist universell, weil sie ein ganzes Spektrum von Rechenarten umfasst: Wurzelziehen, Logarithmieren, Quadrieren, selbst die Umrechnung von Maßen und Gewichten, das Gesellschaftsrechnen, die Integralrechnung, die Trigono-

[312] Vgl. Léon Lalanne 1846: 5-6.
[313] Léon Lalanne 1845: 67 f.
[314] Léon Lalanne 1845: 68.
[315] Vgl. Léon Lalanne 1846: 44.

metrie oder Statistik kann man mit ihr ohne Mühe und Wissen mechanisch vollziehen.[316] Während das Rechenbrett in den Volkschulen, erneut das Rechnen auf Papier durch Handrechnung ersetzt, mechanisieren in den Ingenieursschulen die *abaques* die Algebra. Pouchets gleichabständiges Koordinatensystem ersetzt Lalanne bei der Anamorphose durch eine gleitende Skala, die Geraden anstelle von Hyperbeln verzeichnet. Lalannes Geraden sind einfach zu berechnen. Während die Hyperbeln Pouchets eine große Anzahl von Werten verwenden, reichen bei einer Geraden zwei Werte. Den Rest erledigt das Lineal. Die verzerrten Einheiten der Achsen haben also auch die Anschreibung der Graphen mechanisiert. Wie Anaximander hat Lalanne die Gerade in einer Schar von Hyperbeln gesucht. Doch während Anaximander die Schattenlinie des Abakus für die Schreibfläche rektifiziert, so dass jeder Schattenschreiber zum Griffel wird, wollen die geraden Linien Lalannes den Raum zurückerobern.

Auch Soreau hat rektifiziert, als er die Ingenieurswissenschaft an die Alphabettafel angeschlossen hat. Um die Ingenieursausbildung als Wissenschaft zu legitimieren, hat er die Etymologie der Rechentafel zweifellos verzerren. Zwar werden die Nomogramme spätestens mit den Eisenbahn-, Kanal- und Festungsbauprojekten zum Alphabet des Ingenieurs. Doch der Gebrauch der Linien gründet weniger auf den Operationen des Rechenbretts. Soreaus Lesart, der Abakus sei eine alphabetische Zahlentafel, kann die Archäologie nicht bestätigen. Die erhaltenen Abaci sind nicht mit Buchstabenzahlen sondern überwiegend mit akrophonischen Zahlenzeichen beschriftet. Man findet sie auf Inschriften und in den Niederschriften der Dekrete. Sie lauern in athenischen Steuerlisten. Der Schatzmeister verwendet sie für seinen Rechnungsbericht. Die akrophonischen Zahlen werden in der Finanzverwaltung und Buchhaltung verwendet. Die Buchstabenzahlen sind dagegen – wie schon im ersten Teil ausgeführt – den Diagrammen der Geometrie, den Harmonien der Musik und den Diophantischen Gleichungen vorbehalten. Schon allein darum kann der Abakus keine pythagoreische Zahlentafel bezeichnen.

Nachdem sich so alle Pfade als Holzwege erwiesen haben, bleibt die Frage, welche Wortbedeutung von αβαξ am Anfang steht? Cantor betont, dass das

[316] Für die Aufzählung der Anwendungen vgl. Léon Lalanne 1846: 43-69.

Wort »abacus« zunächst weder ein Rechenbrett, noch einen Tisch bezeichnet, sondern lediglich eine »flache Oberfläche«.[317] Um seine Lesart zu beweisen sondert er zunächst den Wortstamm -βακ ab. Das vorangestellte α liest er als α-Privativum und Verneinung. Die Wurzel -βακ findet Cantor in βακτρον. Sie ist aber auch in den Diminutiven βακτηρια und im »bacillum« wirksam. Βακτρον verweist auf die Insignien des Richters: für »Stock«, »Stab« und »Szepter«. Der griechischen Rechentafel wohne »die Bedeutung des »Nichtgehenkönnens«, des »Fußlosseins« inne, schreibt Cantor daraufhin.[318] »Fußlossein« aber ist bei Cantor der sprechende Name für »Tafel«. Aber Cantors Übersetzung verrät zugleich auch seine Ratlosigkeit. Gegen die Gewalt des α-privativums setzt er eine negative Ontologie, die selbst das Nicht zum Sein erklärt. Aber die interlineare Übersetzung bleibt einsilbig. Lautlich und semantisch ist das griechische α-Privativum mit dem lateinischen *in-* und dem deutschen *un-* verwandt.[319] Demnach bezeichnet der Abakus nicht das Fußlossein, sondern der »Unfuß«, das »Unszepter« und der »Unstock«. Man braucht also nur einen einzigen Vokal, das α-Privativum, um Wörter zu kanzellieren. Er setzt die bedingungslose Verneinung ins Werk. α-Wörter sind nicht-Wörter. Ihnen versperrt das Präfix jeden Zugriff auf das Sein. Abakus ist der Name für ein Medium, das *ex negativo* aus der Definition des Tisches und den Insignien des Richters seine Bestimmung zieht. Stab und Kugel verweisen aber auch auf die Geometria. Sie hütet Gesetz der Tafel. Doch das α-Privativum steht nicht für ein Nichtsein. In ihm blickt das Sein nicht spiegelverkehrt zurück. Die Verneinung ist kein Zustand. Sie ist eine Operation, die den Namen des Wortes bestimmt. Das privative Präfix ist nicht nur mit der idg. Satznegation *ne* verwandt.[320] Diese Silbe hat ursprünglich auch selbst Sätze negiert.[321] *Un-* ist nur die abkürzende Form des verneinenden Satzes:

> Nicht [ist er] ein Stock.
> Nicht [ist er] ein Stab.
> Nicht [ist er] ein Szepter.

I I I I I I

[317] J. M. Pullan 1968: 89.
[318] Moritz Cantor 1907: I 131.
[319] Debrunner 1917: § 54.
[320] Alfred Debrunner 1917: § 56.
[321] Vgl. Eduard Schwyzer 1990: 431

Dies sind die Namen der Tafel. Aber was könnte damit schon gemeint sein? Es hat den Anschein, als gäbe es keine Aussage. Diese Einsicht mag für Cantors halbherzige Übersetzung verantwortlich sein. Das α hingegen hat nur eines im Sinn. Alle Wörter die sich diesem Buchstaben nähern, zu dezimieren und zu löschen. Tilgung ist die Operation, die die Tafel am besten bezeichnet, Wiederbeschreibbarkeit ihre entscheidende Funktion. Der Abakus verweist auf den Tisch. Aber kein Übertrag findet statt. Eine einzige Silbe bringt den Tisch zu Fall. Der Abakus ist zwar nun nicht mehr Träger von Zeug und Recht. Und dennoch bleibt er das Medium von Zahl und Rechenstein, Punkt und Linie. Doch diese universale Macht kommt ihm weniger durch schiere Präsenz zu, sondern vielmehr, weil er nicht ist. Das Nicht hat in der griechischen Mathematik eine lange Tradition. Und nicht nur dort. Man kann es in der Definition des Punktes und der Zahl finden und dahinter einen praktischen Sinn vermuten. Als Element der Elemente stiften die Einheiten der Zahl- und Bildwissens eine Ordnung, ohne selbst Teil der Ordnung zu sein. Und selbst der platonische Ideenhimmel ist ein Reflex des α-privativums. Abstraktion und Idealität beruhen auf der wiederbeschreibbaren Tafel.

Noch einmal soll abschließend das Feld beleuchtet werden, auf dem der Abakus agiert. Auch der Ingenieur Soreau kennt die Bedeutung des »Fußlosseins« und meidet sie. Er wendet ein, dass in Cantors Lesart kein Wort mehr für »Tisch« übrig bleibe. Dieser Einwand trifft aber auch sein Abecedarium der Zahlen, das mit der Ansammlung von Zahlen auch die Tabelle denkt. Aber man kann auch noch einen anderen Einwand vorbringen. In beiden Fällen liegt ein uneigentlicher Sprachgebrauch vor. Nur das scheint sicher: Kein Wort bezeichnet die Tafel, so dass erst eine Umschreibung sie benennen kann. Doch diese Lücke in der griechischen Sprache, die das Wesen der Tafel über das α-privativum selbst als Lücke anschreibt, bezeichnet die Eigenschaft der Tafel recht genau. Die Tafel ist eine Leerform: ein Holzbrett mit einer Umfriedung, das Sand, Kalk, Staub oder Wachs aufnehmen kann. Die Tafel kann der Boden sein, auf dem die Alten stehen: Meeressand und Wüstenstaub. Das erklärt womöglich, warum nur ein Bruchteil der Abaci überliefert ist. Denn fast jede ebene Fläche kann zum Abakus werden. Und im Sand sind Spuren schneller gelöscht als geschrieben. Die Kiesel, die als Rechensteine dienten, entwischen der Archäologie. Ihre Verwendung kann man ihnen nur schlecht ansehen. Diese Nichtigkeit, die das Wort »Abakus« der Tafel von Anfang an zuweist, steht deshalb auch für eine Eigenschaft, die die ebene

Fläche vor anderen Oberflächen auszeichnet: für Tilgung und Wiederbeschreibbarkeit. Am Anfang stehen weder semitischer Staub[322], noch ein Prunktisch, sondern eine fußlose Tafel. Die ebene Fläche bezeichnet den Anfang jeder graphischen Benutzeroberfläche. Die entscheidende Funktion der ebenen Fläche ist der Übertrag. Auf das Nichts, können sich alle Etymologien einigen.[323] Doch Cantor leitet noch eine weitere Bedeutung vom Wurzelstamm -βακ ab. Das verneinende α könne auch dem Verb βαξω, »ich spreche«, vorangestellt sein. So bezeichnet der Abakus auch ein Rechnen, »bei welchem nicht gesprochen wird«, schreibt Cantor.[324] Das macht wenig Sinn. Denn der Abakus steht im Gegensatz zur Papieroberfläche nur für eine bedingte Schriftlichkeit. Wahrscheinlicher – und durchaus mit βαξω verwandt – wäre eher eine Ableitung von αβακεω, »ich verstehe nicht«, »ich erkenne nicht«, »ich merke nicht«. Dies ist umso wahrscheinlicher, als dass das privative Präfix auch mit der indogermanischen Negation *ne-* verwandt ist.[325] Ein Beispiel ist das lateinische *nescio*, das sowohl etymologische als auch semantische Beziehungen zu αβακεω unterhält. In beiden Fällen bezeichnet der Abakus eine mechanische Rechenart und eine Operation, die ohne Wissen mit Rechensteinen durchgeführt werden kann. Der Abakus rechnet mit dem Nichtwissen seiner Benutzer. Er bezeichnet eine Rechenweise, bei der das Gedächtnis entlastet wird, da das Ergebnis nicht gemerkt, sondern aus der Position der Rechensteine und den Bezeichnungen der Spalten abgelesen werden kann. Am Ende kann dennoch keine Erklärung vollständig überzeugen. Weder die Operationalisierung, das Nichtwissen oder das leere Gedächtnis, noch das Fußlossein können überzeugen. Denn selbst die etymologischen Wörterbücher können die Bedeutungsketten nicht in eine chronologische Reihe zwingen.[326] Vielmehr machen die Bedeutungen ein Feld sichtbar. Von der Wurzel -βαξ verzweigen sich die Bedeutungen. Die Tafel erzeugt einen Baum von Wortverwandtschaften. Nur das α-Privativum gibt vor,

III II I

[322] Schon Cantor weist darauf hin, dass íbaj nicht aus dem semitischen Wort für Staub hergeleitet werden kann. Die Ähnlichkeit der Wörter sei nur ein Spiel sprachlichen Zufalls. Vgl. Moritz Cantor 1907: I 131.
[323] J. M. Pullan 1968: 89. Hjalmar Frisk 1960: I 3. Alfred Nagl 1914: 18.
[324] 1907: I 131.
[325] Albert Debrunner 1913: § 56.
[326] Hjalmar Frisk 1960: I 3.

dass die Verwandtschaften nicht oberirdisch wuchern. Sie befinden sich auf der Seite der Verneinung, die auf der Schreibfläche womöglich als Tilgung sichtbar wird.

Über die Mechanik des Buchhalters und ein Nichtquadrat

Das *Liber Abbaci* ist kein »Buch des Rechenbretts«. Fibonacci beruft sich um 1202 auf die ebene, euklidische Fläche. Viele Aufgaben belegt er mit einem Diagramm. Ist die Aufgabe ins graphische Format gebracht, kann man die Lösung mechanisch lösen. Fibonacci macht nicht die Null zum Ursprung seiner formalisierten Zahlenbewegungen, sondern die wiederbeschreibbare Tafel. Darum kann die Geschichte der Operationalisierung nicht erst bei den Arabern beginnen, die das dezimale Stellenwertsystem an die südlichen Ränder der europäischen Welt transportieren. Sie muss mit der Funktionalisierung des Nichtwissens beginnen. Sein Agent ist die fußlose Tafel, die in einem Zug anschreibt und löscht. Die Tafel hat ein Pendant in der Zukunft. Die Buchhalter können ohne Zögern die Bedeutungen des Abakus unterschreiben. Sie wissen nicht, sie merken nicht. Darum kann ihre Rechenarbeit auch eine Maschine verrichten. 1946 schreibt Turing über die *Automatic Computing Engine*:

> The class of problems capable of solution by the machine can be defined fairly specifically. They are those problems which can be solved by human clerical labour, working to fixed rules, and without understanding...[327]

Die Arbeit seiner Rechenmaschine fasst er als »Büroarbeit«. Aber Büroarbeit ist nicht nur ein Maß für die Schnelligkeit der Rechenmaschine. Sie ersetzt vor allem die Buchhalter der Hollerithmaschinen.[328] Die entscheidende Qualität der Buchhalter ist ihre vollständige Selbstaufgabe – ihr Nichtwissen und ihre Disziplin. Sie arbeiten nach festen Regeln, ohne irgendein Verständnis.

Auch wenn Turing den Arbeitsbereich seiner Maschine unter den Bedingungen strikter Schriftlichkeit definiert, so gründet sie auf dem leeren Gedächtnis der Papiermaschinen. Schon der namenlose Schatzmeister von Dareios weiß nichts. Er merkt nichts und erkennt nichts. Der Schatzmeister gehorcht der Mechanik des Rechenbretts, sein Wissen bezieht er von der Tafel. Sie ersetzt sein Gedächtnis.

||| || |

[327] Alan Turing 1946/1986: 38.
[328] Alan Turing 1946/1986: 20-21.

So nimmt es wenig Wunder, wenn die Tafel seinen Kollegen auf dem Marktplatz ihren Namen leiht. Eine Bank auf der Agora in Athen bezeichnet im 4. Jahrhundert kein Gebäude. Sie besteht aus nicht viel mehr als aus einem Tisch. Der Tisch mag eine Tafel sein. Zuweilen ist er nicht mehr als ein Brett. Darum haben sich seine Spuren bisher nur in der Literatur verfolgen lassen. Der Tisch selbst bleibt verschwunden.[329] Die Tafel ist eine Wechselbank, ihr Name τραπεζα. Auf ihr sitzt manchmal ein Sklave, der mit einem Biss auf die Münzen ihre Echtheit testet. Doch den Namen des Tischs kann man nicht ersitzen. Ihn erhält nur derjenige, der das Geld wechselt – der das Brett bedient. So bezeichnet τραπεζιτης den »Geldwechsler« und »Bankier«. Der Geldwechsler ist also ein Tischler im engsten Sinn des Wortes. Doch er stellt keine Tische her. Vielmehr bezieht der Tischler seinem Namen vom Tisch. Die Operationen, die man auf dem Tisch ausführen kann, unterstützen zahlreiche Geräte: Maßstab und Prüfstein. Doch die entscheidende Unterstützung kommt von den Schreibflächen: Sie kommt von den Papyrusrollen und Wachstafeln, die die Kontoführung erledigen. Und zuletzt und vor allem vom Abakus, der die Geldsummen umrechnet.[330] Ist der Tisch also ein Ort des Übertrags? Man kann auf diese Frage mindestens zwei Antworten finden: Die erste Antwort ist arithmetisch, die zweite geometrisch. Gibt es also einen Übertrag? Eine Antwort gibt der Tisch. Für das Geld kann man dies schwerlich verneinen. Auf der Ebene der Zeichen wendet sich das Blatt des Tisches. Er muss sich beugen. Denn er ist in der Geometrie nicht mehr der Ort des Übertrags, sondern wird selbst zur Münze. Die Geometrie überträgt den Wechseltisch auf die Schreiboberfläche. Auf der Fläche wird er fußlos zur Tafel. So beugt sich der Tisch nicht mehr unter dem Gewicht des Sklaven. Er gehorcht vielmehr dem Gesetz des Diagramms: dem Regime von Bild, Schrift und Zahl.

Was schreibt Euklid, wie wird der Wechseltisch in den Elementen katalogisiert? Das Trapez wird gleich zu Beginn, im ersten Buch, eingeführt. Und dennoch nimmt es unter den Definitionen den vorletzten Platz ein. Und der Tisch fällt noch tiefer. Unter den vierseitigen Figuren erreicht das Trapez nur den letzten Platz. In der 22. Definition heißt es:

III II I

[329] Edward E. Cohen 1992: 68.
[330] Edward E. Cohen 1992: 69.

> 22. (30-34) Von den vierseitigen Figuren ist ein **Quadrat** jede, die gleichseitig und rechtwinklig ist,
> ein **längliches Rechteck** jede, die zwar rechtwinklig, aber nicht gleichseitig ist,
> ein **Rhombus** jede, die zwar gleichseitig aber nicht rechtwinklig ist,
> ein **Rhomboid** jede, in der die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich sind und die dabei weder gleichseitig noch rechtwinklig ist;
> die übrigen vierseitigen Figuren sollen **Trapeze** heißen.[331]

Fast beiläufig erwähnt Euklid das Trapez. Auch wenn man nur mutmaßen kann, was dem Trapez diese Missachtung eingebracht, so ist sein letzter Platz nicht ohne System. Er fügt sich in die Axiomatik des Quadrates. Der Wechseltisch, das Trapez, ist die Kehrseite des Quadrates. Das Trapez bezieht seine Ordnung aus der Durchstreichung des Quadrates. Das verbindet es mit dem Abakus. Das Trapez ist ein α-Quadrat. Ein Trapez ist eine Figur, die keine gleichen Seiten und keine gleichen Winkel hat. Es bezeichnet eine Restkategorie, auf die das erste Buch nur noch einmal zurückkommen wird.[332] Trotzdem gründet auf dem Trapez die Vollkommenheit des Quadrates. Das verbindet es mit dem Punkt. Über den Punkt schreibt Euklid:

> Ein Punkt ist, was keine Teile hat.[333]

Und wenige Kommentare lassen diese Definition gelten. Denn sie setzt einen Anfang, ohne zu definieren. Der Punkt ist reine Verneinung. Am Anfang steht ein α-privativum: Ein Punkt ohne Breite und Ausdehnung. Der Punkt ist nicht.

> punctum est cuius pars nihil est,

schreibt Martianus Capella daraufhin. Anstelle von »nulla« setzt er »nihil«. Der Punkt ist nicht das, was keinen Teil hat. Er ist das, dessen Teil Nichts ist. Und Sir Heath bemerkt zu dieser Ersetzung:

> I cannot think that it gives any sense.[334]

Was Martian so sinnlos in Worte fasst, ist die uneigentliche Definition des Punktes. Der Punkt hat teil am Nichts. Das Volle gründet auf der Leere. Aus diesem Punkt, dem Bruchteil des Nichts, entfaltet sich die Linie, aus der Linie die Fläche, aus der Fläche das Quadrat... . Auf diesem Nichts, das weder Teile, noch eine Lage hat, beruhen alle Elemente. Wie die fußlose Tafel wuchert der Punkt unterirdisch – er ist als absoluter Anfang mit niemandem verwandt. Diese Nichtverwandschaft vererbt der Punkt an das Trapez. Dafür sorgt der
III II I

[331] Euklid I Def. 22.
[332] Euklid I 35.
[333] Euklid I Def. 1.
[334] Heath 1923 ff – I 155.

axiomatische Aufbau. Über die Nichtverwandtschaft ist das Trapez mit dem Punkt verwandt. Für das Quadrat nimmt das Trapez die Position des Punktes ein. Das Trapez ist ein privatives Quadrat. Darum ist ihm auch der letzte Platz reserviert. Im Trapez spiegelt sich der Punkt, im Punkt das Trapez. Während der Punkt über die Linie bis zum Trapez sich entfaltet, führt die 22. Definition die Fülle des Quadrates auf eine Restkategorie zurück, die mit dem Quadrat einzig die Vierseitigkeit teilt. Doch nicht das Trapez bezieht seine Bestimmung *ex negativo* vom Quadrat. Es ist das Quadrat, das seine Bestimmung vom Trapez erhält. Das Trapez ist die Einheit der Elemente. Es stiftet die Ordnung des Quadrates, ohne selbst Quadrat zu sein. Es ist ihm so vorgängig wie die Einheit der Zahl oder der Punkt der Linie. Genau diese Einsicht über die Geschäfte des Schatzmeisters gewährt die Geometrie. In der Fläche wird der Wechseltisch zur Tafel. Erst jenseits des geschäftigen Treibens der Agora, gewährt sie Einblick in die unterirdischen Filiationen, die jeden Tausch *per definitionem* ausschließen. In der Geometrie ist er nicht mehr als das α-privativum des Quadrats. Doch auf der Schreibfläche teilt dieser Tisch nicht nur seine Bedeutungen, auch die Funktionen mit dem Abakus. Denn der Abakus ist ein Tisch, der keine Beine hat. Der Wechseltisch ist Verneinung. Er ist nicht. Und strenggenommen ist selbst das »nicht« nicht. Dieser Tisch ist so sehr »nicht«, dass die Ökonomie nur selten zu einem Ort des Übertrags wird. Es scheint, als sei der Übertrag des Wechseltischs bei Euklid nur um den Preis seiner Abwertung zu haben. Denn er stört die Idealität der Mathematik, weil an ihm der Staub der Agora klebt. Vielleicht ist der Staub der sichtbare Beweis, dass selbst die *Elemente* des Euklids nicht frei von den Rückständen kaufmännischer Arithmetik sind. Doch der Schatzmeister kann das nicht bezeugen. Noch einmal: die akrophonischen Zahlzeichen bezeichnen allein die Kolumnen des Abakus. Spät wandern sie auf die Fläche des Rechenbretts. Das Interesse an ihnen und dem Rechenbrett ist weniger ein praktisches als ein systemisches. So mag man vermuten, dass die Kontamination ganz anders verlief. Euklid muss den Wechseltisch nicht idealisieren. Als windschiefes Quadrat hat es das geschäftige Treiben auf den Rechentischen und Banken der Agora seit dem 5. Jahrhundert schon immer bestimmt und unterminiert. Der Staub ist dem kühlen Atem der axiomatischen Mathematik nicht vorgängig. Er gründet auf ihr. So bleiben zwei letzte Fragen: Gibt es also einen Übertrag in der Arithmetik? Und wie sieht er aus?

Der Übertrag tritt auf

Das Auge ruft den Schatzmeister. Er hat seinen Platz nicht verlassen. Wo bleiben die Münzen? Sie wandern aus der Hand des Vasallen direkt auf den Tisch des Schatzmeisters. Auch dieser Tisch ist ein Wechseltisch. Die Münzen aber darf man nicht aus den Augen lassen. Sie liegen in einer Reihe: Der Schatzmeister rechnet mit den Münzen des Vasallen. Es gibt keine Abstraktion. Der Abakus des Schatzmeisters ist kein universales Hilfsmittel der Arithmetik. Er ist ein Zahltisch. Gezählt wird das geschuldete Geld. Den Wert der Münzen bestimmen akrophonische Zahlzeichen. Die Zahlen werden also durch die Anfangsbuchstaben der Zahlwörter bezeichnet. Die Münzen werden in Reihen den griechischen Buchstaben ΜΨ ΗΔ Γ ΟCΤ zugeordnet. ΜΨ ist böotisch und steht für die akrophonische Zahl Χ, das entspricht 1000 Drachmen. Η bezeichnet die Hunderter, Δ versammelt die 10er. Lediglich Γ durchbricht die Reihe der abgekürzten Zahlwörter. Es summiert nicht die Fünfer, sondern die Einer. Auf dem Zahltisch sind $1 \cdot 1000 + 1 \cdot 500 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 1$ Drachmen gesetzt. Unter Ο sind die Oboloi versammelt. Die zwei folgenden, letzten Zahlzeichen CΤ nehmen die Bruchteile der Oboloi auf. Dabei steht C für einen 1/2, Τ für 1/4 Obolos. Gesetzt sind vier Münzen. Der Schatzmeister muss nur noch addieren. Er zählt 1731 Drachmen und 4 Oboloi.[335] Ist was damit schon alles beglichen? Der Blick des Schatzmeisters wandert zu den Wachstafeln, in denen die Schulden verzeichnet sind. Der Vasall schuldet TALANTA Η: 100 Talente.[336] Gezahlt hat er nur einen geringen Teil. Und wie wird die Zahlung dauerhaft vermerkt? Wie wird die geleistete Zahlung protokolliert? Nirgends findet man einen Griffel. Stattdessen trägt der Zahlmeister eine Münze am Handgelenk. Wachstafeln und Münzen sind seine Werkzeuge. Der Schatzmeister ist kein Buchhalter. Er darf nicht schreiben. Er legt Münzen, zählt sie und liest Zahlen. Weder auf dem Abakus, noch auf den Wachstafeln findet ein protokollierter Übertrag statt. Wie

III II I

[335] Das Ergebnis von Pullan lautet 1231 Drachmen. Er übersieht einen Rechenstein oberhalb von H, so dass er die Fünferbündelung nicht in Rechnung stellt. J. M. Pullan 1968: 26.
[336] Vgl. Karl Menninger 1958: II 111.

also wird die Schuld dauerhaft beglichen? Von hinten nähert sich eine Gestalt. Sie handelt gleichsam im Verborgenen. Und dennoch ist die dritte Hand des Schatzmeisters. Sie nähert sich hinterrücks. Die Gestalt ist der Übertrag in Person. In den Händen hält sie Körbe. Sie warten auf die Münzen des Zahltischs. Denn erst wenn die Münzen mit den Wachstafeln in der Schatzkammer ruhen, ist die Zahlung endgültig beglichen. Erst in der Schatzkammer werden die versiegelten Wachstafeln zu einem dauerhaften Garant der erfolgten Zahlung.

Der Übertrag auf dem Papier ersetzt den Transport der Münzen. Er wird zu einer zentralen Funktion des dezimalen Stellenwertsystems. Bei Rechnungen mit Übertrag, bei Division und Multiplikation, werden Zahlen getilgt und durchgestrichen. Wenn der Buchhalter auf dem Papier eine Schuld begleichen will, annulliert er sie mit einem einzigen Federstrich. Der Bote, der auf dem Volutenkrater von Canossa noch so sichtbar im Bild ist, wird kanzelliert. Und dennoch geht das Streichverfahren, das das Amt des Boten mühelos ersetzt, auf seine gebückte Gestalt zurück. In jedem Übertrag haust der Unsichtbare: die Bürde seines Amtes, die Eile seiner Füße. Warum der Abakus den Übertrag zu einem so mühsamen Geschäft macht und ihn derart marginalisiert, zeigt die Perservase nicht. Erst ein Blick auf die Operationen des römischen Abakus und auf das Format seiner Zahlzeichen will ich auf diese Fragen antworten.

Der Handabakus und die Linearität der Führungsrillen

Die römischen *Abaci* sind nicht mehr unbedingt Tische. Sie sind nicht immobil und zweidimensional. Der römische Abakus aus dem Münzkabinett in Paris passt in eine Hand.[337] Er ist der Vorgänger des *pocket calculator*, der noch mit seinem Namen auf die Kieselsteine (*calculi*) römischer Rechentafeln verweist. Doch weniger ihre Größe als ihre Gestalt sorgen dafür, dass Tilgungen im Gegensatz zum Rechentisch mechanisch vollzogen werden und Nichtwissen zum entscheidenden Eigenschaft der römischen Rechengeräte wird.

Der Handabakus besteht aus einer Bronzeplatte, die über neun Öffnungen verfügt. Die Führungsrillen (*alveoli*) nehmen eine unterschiedliche Anzahl von Rechenknöpfen auf, die man »kleine Schlüssel« (*clavicula*) nennt. Werden sie in den Führungsrillen verschoben, vollziehen sie mechanisch Subtraktion und Addition als Zählung und Rückzählung. Aber diese Mechanik hat ihren Preis, der sich in der Aufteilung der Spalten niederschlägt. Die ersten sieben Spalten sind mit natürlichen Zahlen bezeichnet. Sie besitzen die Werte 10^6 bis 10^1. Beim römischen Abakus findet man also wie bei den akrophonischen Zeichen eine dezimale Stellenwertlogik. Lediglich die letzten vier Kolumnen sind der Münzteilung vorbehalten. Die erste bezeichnet die Einheit der Münzteilung, das *as*, die folgende eine Unze, die letzten zwei Spalten die Bruchteile der Unze. Der Handabakus ist also zugleich auch eine Münztafel. Er erleichtert mit einer Obergrenze von 9.999.999 Denar nicht nur den Umgang mit großen Zahlen. Er mechanisiert auch den Umgang mit den kleinsten Bruchteilen der Einheit, den Umgang mit den *semuncia* (1/6 Unzen), den *siccilici* (1/3 Unzen) und den *setulae* (1/2 Unzen). Die Bruchteile des *as* beruhten auf dem Teiler 12. Dieses System der Münzteilung bricht nicht nur mit der dezimalen Ordnung des römischen Zahlenvorrates. Auch die Bezeichnungen der Einheiten lassen jede Kombinatorik vermissen. Jeder Bruch erhält sein eigenes Zeichen. Und das ist

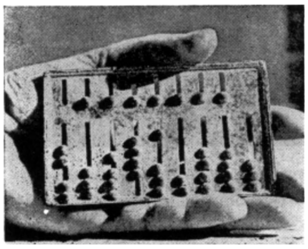


Fig. 36 – Römischer Handabakus, Menninger 1979.

[337] Von diesen Handabaci sind 5 Exemplare erhalten. Es sind die einzigen römischen Rechenbretter, die erhalten sind.

weniger mnemotechnisch fatal. Es schränkt vor allem den Gebrauch der römischen Bruchzahlen auf die Gewichts- und Münzrechnung ein. Die römischen Brüche lassen sich leicht addieren und subtrahieren. Division und Multiplikation sind dagegen nur eingeschränkt möglich. Der Handabakus ist zweckgebunden. Er ist keine Universalmaschine. Seine Funktionen scheinen auf das Umrechnen von Gewichten und Münzen beschränkt. Verlässt man den Raum der Verwaltungsarithmetik, etwa der Berechnung von Steuern, Sold und Abgaben, so verweigert der Handabakus schon bald den Dienst. Denn die Auflösung seiner Spalten ist zu gering. Was sich für das Gewichts- und Geldsystem durchaus als praktisch erwies, ist für die genaue Berechnung der Jahreslänge nur hinderlich. Die Länge des Cäsarischen Jahres lässt sich noch notieren. 365 1/4 Tage sind CCCLXV = —. Doch genauere Berechnungen des Sonnenjahres kann man mit dem Zahlenvorrat der Handabaci nicht durchführen. 365,242199 Tage sind auf ihnen nicht mehr darstellbar.[338]

Der Handabakus unterscheidet sich nur durch die Führungsrillen von den griechischen Rechenbrettern. Und dennoch gehören sie zwei getrennten Welten an. Die Führungsrillen besitzen Länge, aber keine Breite. Sie wachen über die Linearität. Aus ihnen kann darum niemals die Axiomatik der Elemente und Fläche entstehen. Kein Winkelhaken verirrt sich auf die Taschenrechner der Römer. Schon hier wird klar, dass Groma und Gnomon zwar beide auf dem rechten Winkel beruhen und dennoch grundsätzlich verschieden sind. Die Führungsrillen sehen eine lineare Ordnung vor. Sie untersagen den Zahlen jeden Kontakt zu Schrift und Bild. Während das griechische Rechenbrett der Ordnung der Fläche angehört, ist der römische *abacus* auf Kolumnen und Spalten beschränkt. Im Zentrum stehen Aussparungen. Die Führungsrillen sorgen dafür, dass nur mit Zahlreihen, nicht mit Zahlflächen gerechnet werden kann. Überträge zwischen zahlen und Buchstaben kann man mit den *alveoli* nicht erzeugen.

III II I

[338] David Ewing Duncan 1999: 196.

X – Bündeln, Abschlagen, Dezimieren

Die Führungsrillen sind zweigeteilt. Der obere Teil ist für die Bündelungen zuständig. So lässt sich jede Zahl nicht nur als Summe von Einheiten darstellen. Jeweils 5 Finger (*digiti*) bilden eine Hand (*manus*). Sind also die Schlüssel einer Reihe erschöpft, werden fünf Einheiten zu einer Hand zusammengefasst. Für die Handhabung des Rechenbretts bedeutet das: Sind fünf Einheiten erreicht, wird in der oberen Reihe ein Knopf gesetzt, in der unteren Reihe aber werden vier Knöpfe zurückgesetzt. Die Bündelung bereinigt das Rechenbrett. Diese Operation ging deshalb als *purgare rationem* in die Abakus-Literatur ein. So heißt es in einem mittelalterlichen Traktat:

Fig. 37 – Doppelholz mit 10er-Bündelungen (Menninger 1979).

> Das Rechenbrett ist bereinigt, wenn für viele (gemerkte) Rechensteine ein einziger Rechenstein gesetzt worden ist...[339]

Die Operation auf den mittelalterlichen Rechenbrettern ist immer noch dieselbe. Die Bündelung ist ein Übertrag. Sie ist vollständig in den Operationen der Subtraktion und Addition anschreibbar. Auch die Bündelung verlässt die serielle Ordnung der Zählreihe nicht. Sie ermöglicht lediglich, dass beide Operationen miteinander kombiniert werden können. Mit der dezimalen Ordnung und der 5-Bündelung der Spalten als Hand ist jede Zahl mindestens dreifach darstellbar: als Summe einer Addition, als Summe einer Subtraktion und als Summe von Addition und Subtraktion. Im Falle der 8 zum Beispiel als 5+3, 10-2 oder 10-5+3. Addition bedeutet Reihung, Subtraktion Bündelung: das Reinigen des Rechenbretts. Die römischen Zahlzeichen beziehen ihre Operabilität vollständig vom römischen Abakus.[340] Die entscheidende Funktion aber ist die Tilgung. Denn Bündelung setzt Tilgung voraus. So gründet der römische Abakus auf dem Riss. Die Führungsrillen mechanisieren den Übertrag. Sie sorgen dafür, dass der Übertrag fehlerfrei und

III II I

[339] »Purgare arcus est, quando pro multis caracteribus unus solus caracter ponitur...« Vgl. Charles in *Comptes rendus* hebd. de l'ac d. sc. XVI (1843) 240.

[340] Vgl. Zur Bündelung Karl Menninger 1979: I 55 und über den römischen Handabakus Karl Menninger 1979: II 112-13. Der Abakus, so Menninger bediene sich zwar einer Stellenordnung. Und dennoch diene er nicht der Kontrolle von Rechnungen wie dies später mit den Ziffern möglich wird, sondern nur der Zählung und Bündelung. Ebd. II 128f. Ebenso Taisbak 1965: 153.

nur einmal geschieht. Müssen die Psephoi noch einzeln vom Rechentisch entfernt werden, reicht bei den Handabaci ein einziger Zug, um die Rechnung zu bereinigen. Kein Rechenstein wird vergessen, die Bewegung der Hand durch die Slots diszipliniert. Die Führungsrillen regeln den Übertrag. Sie vollziehen ihn mit eiserner Hand. Die Disziplinierung der Hand, Bündelung und Tilgung strahlen wiederum auf das Imperium zurück. *Purgare rationem*, die Rechnung bereinigen, bedeutet, die Münzen des Zahltischs zu entfernen. Sueton legt die gleichen Worte Caligula in den Mund:

> Als er das Todesurteil der Gefangenen unterschrieb, die am 10. Tag bestraft werden sollten, sagte er, er bereinige damit seine Rechnung.[341]

Auf dem Abakus ist das Bereinigen der Rechnung ein Todesurteil. Denn weder der Tisch des Dareios noch der Handabakus besitzen ein Gedächtnis für Zahlen. Sie besitzen keinen Speicher. Das Todesurteil zu unterschreiben oder den Tribut der Provinzen zu buchen, diese beiden Operationen sind auf Brett und Tisch deshalb identisch.

X – Tilgung als Code

Die Führungsrillen sind strenggenommen nicht mehr als Zwischenräume. Auf ihnen beruht die lineare Anordnung und Operationalität der römischen Zahlen. Denn die *alveoli* bestimmen, was wir auf den römischen Handabaci rechnen und was wir schreiben können. Ifrah[342] und Menninger[343] nehmen dagegen an, dass die römischen Zahlzeichen ihre Form von den Kerben der Kerbhölzer beziehen. Für sie wird ihr Format durch die Klinge des Messers und das Holz bestimmt. Einheiten werden durch einfache Kerben (I) notiert. Bündelungen werden mit einer Durchkreuzung (X) markiert. So entsteht die 10er Bündelung. Den Name für X, »decem«, leitet Menninger von »decussare« ab.[344] Und im Georges findet man unter dem Eintrag de Bedeutungen »kreuzweise abteilen« und »abschlagen«. Die X entspringt also einer Handlung und auf dem Rechenbrett ist sie womöglich auch eine Aufforderung zum Handeln: »schlage ab«, »teile kreuzeweise«. »Zehn«

III II I

[341] »Decimo quoque die numerum puniendorum ex custodia subscribens rationem se purgare dicebat«. Zit. n. Karl Menninger 1979: II 126.
[342] Ifrah 1991: 175-183.
[343] Menninger 1957: II 45-52.
[344] Menninger 1957: II 47.

und »das Zehnt« leitet Georges vom Wort »decussis« ab.[345] Die Form der Fünferbündelung entsteht auch aus dem Schnittwerk. Sie entsteht aus der halben Durchkreuzung.[346] Die Zahlen 1 – 10 verweisen auf die Kerbung, egal, ob man sie als Einheiten anschreibt oder Bündelungen vornimmt. Die Praktiken des Abschlagens, Spalten und Ritzens hat Ifrah auf den Kerbhölzern dalmatinischer Hirten untersucht. Sie ähneln, so Ifrah, den Zahlzeichen etruskischer Münzen. Die Zahlzeichen etruskischer Münzen verweisen auf Rom. So wandern die Zahlzeichen von den Hölzern der Hirten in die Bücher der Hausherrn.[347]

Menninger differenziert. In Hinblick auf die abweichenden Formen der Zahlen C und M glaubt er, dass das römische Zahlsystem nicht geschlossen entwickelt, sondern vielmehr gewachsen sei.[348] So müssen am Ende Fragen offen bleiben. Was ist mit dem Hinweis auf die Kerbung bewiesen? Menningers und Ifrahs Herleitung können nur die Form der Zeichen erklären. Sie geben wenig Aufschluss über die Funktionalität der Form. So sind etwa Kerbhölzer Zählhölzer, ihre Zahlen immobil. Rechnungen mit Kerbhölzern, die über das Zählen hinausgehen, sind nahezu unmöglich. Nicht nur Überträge bleiben ausgeschlossen. Tilgungen sind unmöglich. Lediglich eines kann aus den ausführlicheren Erklärungen Menningers geschlossen werden: Die Form der Kanzellierung kann aus ihr nun in aller Deutlichkeit hergeleitet werden. Sie entsteht formal aus dem X: Der Durchkreuzung des Kerbholzes.

Von hier aus kann man fragen: Welche Operabilität besitzen Messer und Kerbe? Schmandt-Besserat bindet die Kerbhölzer an die Zahlsysteme der Nomaden paläo- und mesolithischer Kulturen.[349] Vor jeder Schrift können die Nomaden der Steinzeit die Kerben nur als Anzahl von konkreten Objekten denken. Sie haben keinen abstrakten Zahlbegriff. Auch bei Ifrah zählen sie Rinder und Milchmengen.[350] Was bedeutet es also schon, dass man einen Ursprung der römischen Zahlzeichen in der Viehwirtschaft finden kann, wenn in den Archiven Roms keine Kerbhölzer liegen. Cicero führt keine Rinder gegen Verres in den

III II I

345 Georges 1998: 1937.
346 Menninger 1957: II 47.
347 Georges Ifrah 1991: 181.
348 Karl Menninger 1957: II 52.
349 Denise Schmandt-Besserat 1992: I 166.
350 Georges Ifrah 1991: 178.

Zeugenstand. Er verlangt nach Büchern. Denn die »Regeln der Aufzeichnung« und die »Führung der Rechnungsbücher«, so Cicero, sorgen dafür,

> dass alles zum Vorschein kommt, was auf der Einnahmen- und Ausgabenseite vorgetäuscht oder unterschlagen wird oder nicht stimmt.[351]

Den römischen Zahlen erinnern nur sehr entfernt an Kerbhölzern. Das Messer voretruskischer Hirten schickt sie nicht in die Steinzeit zurück. Denn diese Zahlen sind nicht nur akkumulierte Anzahl. Sie beugen sich dem Regime der Fläche: dem *imperium* des Abakus'. Und dieses Imperium erstreckt sich nicht nur über Linien und Spalten. Es rechnet mit dem *imperium romanum*.

Die Verwaltung des Übertrags

Der römische Handabakus mechanisiert weniger die additiven Funktionen der Zahlen. Zählen kann man schließlich auch mit einem Messer in der Hand auf einem Kerbholz. Es scheint vielmehr, dass die wesentliche Funktion des Handabakus im Übertrag liegt. Steine, die beweglich sind, verlassen die Ökonomie der Wiederholung. Sie können nicht an zwei Orten gleichzeitig sein. Darum müssen sie lösch- und überschreibbar sein. Der Preis der Mobilität der Zeichen ist ein unhintergehbares Stellenwertsystem, das mit Til- gungen Dopplungen ausschließt. Der Handabakus hat die Säuberungen mechanisiert, indem er sie auf die Führungsrillen überträgt.

Man kann nur spekulieren, wie in der Mobilität der Rechensteine und der Bündelung das Problem des Stellvertreters zeichenhaft wird. Auch das römische Staatsrecht hält Routinen bereit, die verhindern, dass Amtsinhaber und Stellvertreter gleichzeitig operieren. Das scheint deshalb so bemerkenswert, weil das römische Gemeindewesen nicht vom Imperium, sondern von der Abwesenheit von Gewalt seine Ordnung empfängt: Ein Großteil des Ämtersystems gründet auf Tilgungen. Es beruht auf dem Stellvertreter.[352] Der Promagistrat führt die Befehlsgewalt in Abwesenheit des Magistraten fort. Er ist mit den Worten Mommsens ein »Nichtmagistrat«: ein Platzhalter, der dennoch »berechtigter Inhaber der Beamtengewalt« ist[353]. Als Leerstelle des Imperiums hat

[351] Marcus Tullius Cicero Rede für Fonteius 3.
[352] Theodor Mommsen 1887: 1 661 (Fußnote 6).
[353] Theodor Mommsen 1887: 1 11f.

er Teil an der Befehlsgewalt. Wie operiert das republikanische Staatsrecht mit Platzhaltern? Es kennt zwei Fälle Vakanz und Abwesenheit. Zunächst muss der Oberbefehl vakant oder der Gewalthaber abwesend sein.[354] Der Feldherr ist im Krieg gefallen.[355] Der Konsul hat die Grenzen überschritten,[356] der Praetor die Provinz verlassen.[357] Diese Ereignisse erzeugen Leerstellen. Sie drohen, den Befehlsfluss zu unterbrechen. Für diesen Fall sieht das Staatsrecht das Recht und die Pflicht der Stellvertretung vor. Ist der Oberbefehl dann vakant, so darf nur ein Stellvertreter ernannt werden. Denn den Oberbefehl darf niemals zweimal vergeben werden. Die »Einheit des Imperiums« müsse gewahrt bleiben, schreibt Mommsen.[358]

Rechentafeln operieren ähnlich: Wird eine Zahl mobil, darf man sie niemals zweimal legen. Die Bündelung gibt der Zahl X ihre Form. Die Durchkreuzung steht dabei für die Einheit der Rechenoperation. Schreiben und Löschen bedingen einander. Man muss die Rechensteine vom Brett nehmen, die man mit einem Stein bündeln will. Man kann nur schreiben, wenn man andernorts löscht. Nur so kann der Übertrag gelingen. Dezimiert wird in der Politik und auf dem Rechenbrett. Aber zwischen der Verwaltung von Ämtern und den Routinen der Rechenbretter besteht ein Unterschied: Säuberungen und Löschvorgänge auf dem Rechenbrett unterliegen keinem Gesetz. Sie bezeichnen Operationen, die nur die Materialität der Schreiboberfläche erzeugen kann. Was aber heißt das für die Schreibflächen? Die Tilgung ist keine Eigenschaft des römischen Zahlenvorrates. Sie braucht die Rillen des Handabakus. Nur mit ihnen kann man das Rechenbrett im Handstreich bereinigen.

III II I

[354] Theodor Mommsen 1887: I 656.
[355] Theodor Mommsen 1887: I 679.
[356] Theodor Mommsen 1887: I 663.
[357] Theodor Mommsen 1887: I 680 f.
[358] Theodor Mommsen 1887: 682.

ROUTEN

Über Staub, Wind und andere Dinge, die die Rechnung in Unordnung bringen: Eine flüchtige Vorschau

Die Araber haben im 8. Jahrhundert von den Chinesen die Papiermacherei übernommen. Sie haben von den Indern die Ziffern übernommen. Aber Papier und Ziffern finden am Anfang nicht zusammen, die Araber setzen ihre Ziffern weiterhin in Sand. Erst Al-Uqlidisi, der seinen Namen von Euklid leiht, weil er sein Geld mit dem Abschreiben der Euklidischen *Elemente* verdient, überträgt um 952/3 die Arithmetik der Inder im vierten und letzten Buch seiner Arithmetik auf die Papieroberfläche, um die Vorzüge des dezimalen Stellenwertsystems zu optimieren und diese auch in Bagdad bekannt zu machen. Er ersetzt das Finger- und Kopfrechnen [*rum*],[359] und die Staubtafel [*takht*][360] durch »Tintenfass und Papier« [*sahifa*][361], um die Berechnung der kleinsten und größten Zahlen – die Multiplikation und Division – schneller, einfacher und fehlerfreier zu gestalten.[362] Über die Staubtafel [*takht*] schreibt al-Uqlidisi:

> Der Rechner, der sie benutzt, hat Schwierigkeiten, die Überträge zu merken, so dass er sie zuweilen verdoppelt. Zugleich setzt er die Zahlen [auf dem Staubbrett] dem Wind aus, der sie häufig verändert, ganz zu schweigen von den dreckigen Fingern und anderen Dingen, die die Rechnung in Unordnung bringen.[363]

Er vertraut Zahlwege nicht mehr dem Gedächtnis an, sondern setzt auf den protokollierten Übertrag. Doch noch ein Jahrhundert zuvor schreibt Al-Hwarizmi die Überträge in Staub. Wie bei den Indern verdanken die Ziffern bei al-Hwarizmi ihre Existenz der Tilgung. Die Mobilität der Ziffern hat Vorrang vor ihrer Adressier- und Speicherbarkeit. Die Ziffern gründen ihre Operativität noch auf Sand und Wind. Sie werden geschrieben, um zu verschwinden. Solange die Tilgung

III II I

[359] Das Fingerrechnen erhält u. a. die Bezeichnung *Rum*, römisch, weil die Araber das Fingerrechnen aus Byzanz übernommen haben. Der ungesicherte Übertrag ist also römisch.

[360] Mit dem persischen Terminus *takht* wird der Abakus als Staubtafel bezeichnet. Die Quele ist wohl Boethius. Ob die Araber das Rechenbrett nutzten, ist fragwürdig. Vgl. die Ausführungen von A. S. Saidan 1978: 352.

[361] *Sahifa* steht eigentlich nur für Blatt und dennoch unmissverständlich für Papier. Heute ist es ein Synonym für »Zeitung«.

[362] vgl. al-Uqlidisi: Einleitung 1.11.

[363] Al-Uqlidisi: IV 1.17.

und die Verschwiegenheit der Sekretäre den Gebrauch der Ziffern diktiert, findet Papier keinen Anschluss an den indischen Zeichensatz.

Im Bagdad des 9. Jahrhundert sind Papier und Ziffern noch unverbunden. Die Fingerrechnung, die über Byzanz nach Bagdad kam, ist weit verbreitet. Zwar stellt al-Raschid die gesamte Verwaltung Bagdads per Dekret 794-95 von Pergament und Papyrus auf Papier um.[364] Aber der gesamte Staatshaushalt wird auf Staubtafeln berechnet. Noch Abu'l-Wafa al-Buzajani schätzt die Fingerrechnung und gibt Regeln an, wie man selbst Wurzeln mit Hilfe der Finger berechnen kann. Al-Suli hingegen favorisiert in seinem Lehrbuch die Fingerrechnung, weil sie kein Werkzeug als den eigenen Körper erfordere und Sekretäre zur Verschwiegenheit erziehe.[365] Aber während die Fingerrechnung mit Zahlwörtern operiert, werden selbst die indischen Zahlen zunächst der Unordnung des menschlichen Gedächtnisses ausgesetzt.

Ziffern führen nicht zwangsläufig zum schriftlichen Rechnen. So bleiben Fragen, die der Unordnung der Staubtafeln entspringen. Warum halten die neuen Ziffern sich zunächst so hartnäckig auf den Staubtafeln? Welche Eigenschaften der neuen Zahlen setzen auf die Staubtafeln? Und unter welchen Bedingungen werden die neuen Ziffern auf die Papieroberfläche übertragen? Wann, wo und wie entsteht der protokollierte Übertrag? Noch will ich mit dem Übertrag den größten Feind der Arithmetik untersuchen. Paradoxerweise wird der Herrschaft der Staubtafel gerade an einem Ort der größten Gefahr und Unordnung, auf dem Meer, ein Ende gesetzt. Nicht die Araber erst die Europäer gründen auf dem Übertrag Handelsimperien. Es bleibt also zu zeigen, wie die aufkommenden Seemächte des Mittelmeeres ihren Reichtum dem protokollierten Übertrag verdanken. Wie werden Waren und Verkehrsflüsse wie Zahlen zielsicher von einem Ort zum anderen fehlerfrei übertragen?

III II I

[364] Jonathan M. Bloom 2001: 48-49.
[365] Vgl. Jonathan Bloom 2001: 128.

Über einen Holzweg, der auf direktem Wege zum Meer führt

Bis in bis in das 17. Jahrhundert hinein bezeichnet *trade* ein Netz von festen Schiffswegen, ehe es auf den Transport von Waren seine Anwendung findet.[366] Aus Weg wird Handel, aus Routen eine Ware. Doch dies nicht geradewegs. Wege verschwinden nicht im Handel. Denn jenseits der bretonischen Kanäle bezeichnet *trade* einen Weg aus Stroh und Heu, einen Weg, den das Vieh austritt.[367] Dem Viehtritt aber verwehrt die Nautik den Weg in ihr Lexikon. Während *traire* dem Viehtritt folgt und nichts als *ziehen* und *melken* bedeutet, wird *traite* seit dem 12. Jahrhundert »sich auf dem Weg machen« heißen. Es bezeichnet nicht nur die Bewegung von Schiffen, sondern auch »die Ausstellung von Kreditbriefen«.[368] Bewegungen im Raum sind in dieser Sprache fortan nicht ohne Bewegungen auf der Schreibfläche zu denken.

Noch einmal zum »Seebuch«: Schiffswege, fern der bretonischen Küste, fern der Bucht vor der Goulet de Brest und St. Matthieu, heißen dort *fahr water*, *weg*, *varwegh*, *rote* oder *rute*.[369] Das Wort *Route* aber sollte im 12. Jahrhundert eine merkwürdige Karriere machen. Sie beginnt zunächst verhalten. Ein Wort ergibt das andere: Aus dem Verb *rumpere*, *brechen*, entsteht *~~via~~ rupta*, *der durchbrochene Weg*. Dies geschieht im 12. Jahrhundert.[370] Die Vorstellung, dass man sich durch einen unwegsamen, dunklen Wald erst einen Pfad bahnen muss, hat die Wortbedeutung des Weges geprägt. Sie steht so sehr für den Weg, dass am Ende das Partizip ausreicht, um den Weg zu markieren. Der *Weg* wird gelöscht. Er wird auch auf der lexikalischen Ebene gelichtet. Denn die Bahnung [*~~via~~ rupta*] ist der Weg [*route*]. Der Weg ist kein Ort im Raum, er steht für eine Operation: Brechen, Bahnen, Lichten. Die Route wird zum Synonym für Tilgung. Und es hat den Anschein, als sei die Dezimierung zum Wort für Weg schlechthin geworden. Brechen, Schlagen, Durchkreuzen? Der Wald ist ein Kerbholz, die Route eine X.

III II I

[366] Albert Sauer 1996: 114-115.
[367] Albert Sauer 1996: 114. Anm. 78. Vgl. Schiller, Karl /Lübben, August 1875-80/1931: Bd. IV, 605.
[368] Zu den Einträgen »traire« und »traite« Ernst Gamillscheg 1969: 861.
[369] Albert Sauer 1996: 113.
[370] Zum Eintrag »route« Ernst Gamillscheg 1969: 783.

Der lexikalische Erstschlag, der das Partizip, *rupta*, herausbricht, um aus ihm das Substantiv *route* zu formen, eskaliert. Er löst ein ganzes Bündel von Tilgungen aus. Während ~~*via*~~ *rupta* den Weg als Waldweg, den Waldweg als Lichtung anschreibt, löst sich das Substantiv *route* vom Waldboden. In seinem Umfeld entstehen über *rompre* im Sinne von »voie, direction« die Bedeutungen *Brechung*, *Gewohnheit* und *Abrichtung*.[371] Unter ihnen wird der *Waldweg* zur *Spur*. Er wird zur *Bahnung*: Er wird zur Fährte. Die Fährte aber ist kein Weg. Sie richet ab. Sie weist den Weg. Die Route ist damit immer schon auf der Seite der Schreibflächen. *Routier* bezeichnet im angelsächsischen Sprachraum seit dem 13. Jahrhundert ein Bündel von Wegbeschreibungen: ein Buch, das Seewege speichert.

Kein Straßennetz, sondern Wälder und Lichtungen geben das Paradigma für die neuen Wege ab. Nur im unwegsamen Gelände wird jeder Weg zur Bahnung. Routen als Seekurse sind in Rom nicht denkbar. Denn Wege muss man nur bahnen, wenn kein Wegenetz vorhanden ist. Um 1200, in Sumpf und undurchdringlichen Wäldern, muss man die Wege womöglich erst herstellen, die man bereisen will. Umgekehrt weisen gebahnte Wege eine Richtung – die Wege nicht zu verlassen, bedeutet im 1200 womöglich in einem viel existentiellerem Sinne die Orientierung nicht zu verlieren. Denn jeder Weg gebahnte zeugt von einem geglückten Übertrag.

Aber wie verhält es sich mit der Routine? Als Verkleinerungsform verweist sie auf denselben Ursprung wie die Route und der Weg.[372] Aber stellte die Route noch die Verbindung zwischen Holzweg und Linie her, kehrt die Routine nicht mehr in den Wald zurück. Sie ist kein Grenzgänger, sondern entspringt den Techniken der Navigation und Abrichtung. So bezeichnet Gamillscheg für die Routine auch die Bedeutung »Strecke« und »Zug«.[373] Auch wenn »zur Strecke bringen« noch auf die Jagd verweist, weil die Beute in Reihe gelegt wird,[374] so erbt die Routine von der Strecke nicht Treibjagd und Jagdfieber. Die Strecke steht für »Abrichtung« und »Geradlinigkeit«. Sie zeugt davon, dass Routinen um 1200 in

III II I

[371] Zum Eintrag »route« Emmanuèle Baumgartner & Philippe Ménard1996: 701 f.

[372] Zur *Routine* als Diminutiv von *Route* unter »routine« vgl. Ernst Gamillscheg 1969: 783.

[373] Zu den Einträgen »trac« und »trace« Gamillscheg 1969: 860.

[374] Gamillscheg 1969: vgl. den Querverweis von nhd. Strecke über *strack* mit der Bedeutung von »ausgestreckt« und »gerade« zu afrz. *éstrequier*, »der Ort, an dem die Jagdbeute der Reihe nach hingelegt wird«, »Ausbeute einer Treibjagd«.

Hafenbücher, Itinerarien und auf Karten den Gesetzen des Alphabetes und der Planimetrie der Linien folgen. Routinen sind nicht Wege, schon gar nicht Holzwege. Sie sind Wegbeschreibungen. Sie beschreiben Verfahren auf der Schreibfläche, die wiederhol- und mechanisierbar sind. Sie operieren darum weder auf dem Festland noch auf dem Meer. Sie übertragen die Operationen der Bahnung auf die Schreiboberflächen. So bleiben Fragen: Wie wird Schrift zu Bahnung? Auf welchen Oberflächen werden Wege dauerhaft gespeichert? Unter welcher Bedingung der Übertrag protokolliert? Ich will abschließend einen Ort aufsuchen, der dem Duell so fern wie der Treibjagd ist, der weder Land noch Meer ist und dennoch Holzwege zielsicher in Routinen überführt. Sie entspringen keiner Kulturgeschichte der Mnemotechniken. Denn die Routinen der Schriebflächen speichern und tilgen zugleich. Diese Paradoxie organisiert den Übertrag vom Land zum Meer, von Routen auf Routinen, von der Staubtafel auf die Papieroberfläche, vom Papier zum Computer. So will ich abschließend die Geschichte der Routinen am protokollierten Übertrag ausrichten.

Ein Ort mit Untiefe

Den Nullpunkt der Wege bestimmt ein Paradox: Es ist ein zweidimensionaler Raum, ein Raum, der zugleich auch Schreibfläche ist. Dieser Ort besitzt eine Ausdehnung. Und dennoch ist er ohne jede Tiefe. Über die ebene Fläche schreibt Euklid:

> Eine **Fläche** ist, was nur Länge und Breite hat.
> Die Enden einer Fläche sind Linien.
> Eine **ebene** Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.[375]

Der neue Ort scheint geradewegs den Euklidischen *Elementen* zu entspringen. Aber ihre Idealität teilt er nicht. Auch bezeichnet er keine statische Ordnung, sondern kodiert Bewegungen. Dieser Ort ist artifiziell, vielleicht rührt daher sein Name *Mare Nostrum*. Das Mittelmeer ist ein Ort der Aneignung. Als ebene Fläche wird zum Ort des Übertrags. Aus seiner Planimetrie beziehen die Navigatoren ihre Abrichtung. Sie garantiert, dass sie zielsicher von A nach B gelangen.

Wie wird das Mittelmeer zur Schreibfläche der Navigatoren? Um 1200 ist es ein Ort, der Gezeiten und Gestirne nicht kennt. Die Nord-Süderstreckung ist

III II I

[375] Euklid: Elemente I Def. 5-7.

gering und Reisen finden von Ost nach West, von West nach Ost statt. So können die Navigatoren die Krümmung vernachlässigen und das Meer ohne Umstände zur Schreibfläche machen. Dort, wo Strömungen und Untiefen den Weg von Routen nicht kreuzen, tragen Kurse keinen Zeitindex:

> Mediterrane Schiffer legten ihrer Navigation die Fahrt durchs Wasser zugrunde. Der Meeresboden war ihnen in der Regel nicht erreichbar und das Wasser nur wenig bewegt. So waren sie in der Lage, im filigranen Gefecht ihrer Portolankarten mit dem Kompass, einer wie auch immer gearteten Fahrtmessung und Methoden der Besteckrechnung alle navigatorischen Aufgaben zu lösen. In Nordwesteuropa kehrten sich die Bedingungen um. Hier erstickte das unablässig und in unberechenbaren Mäandern turbulierende Meer jeden Gedanken im Keim, Weg und Fahrt durchs Wasser mit denen über Grund gleichzusetzen,

schreibt Sauer.[376] Im Atlantik erfordert Navigation nicht nur den Umgang mit der Zeit. Mit der Tide erfordert sie auch die Berechnung von dreidimensionalen Kursen. Bezeichnenderweise führt die Geographie die neuen nautischen Tafeln, die um 1200 zeitgleich mit dem Kompass aufkommen, unter dem Namen *Plattkarte*. Dort, wo das Meer den Navigatoren weniger komplexe Berechnungen zumutet – im Mittelmeer des 13. Jahrhunderts – werden Routen zweidimensional berechnet.[377] Das Meer wird zur Karte. Die zweidimensionalen Routen der Schreibfläche aber werden kompatibel zu Routinen. Sie werden zum Ursprung des Papierbüros, weil sie Zahlenbewegung universalisieren und somit jede Form der Bewegung speicherbar machen. Der Übertrag von Befehlsmacht ist somit kein Abenteuer mit ungewissem Ausgang mehr, in der ebenen Fläche wird jede Ersetzung protokolliert, jede Tilgung zur Schrift.

Der vierte Kreuzzug: eine Passage mit fehlerhaftem Übertrag

Die neuen Rechenflächen der Kaufleute reagieren auf mündliche Rechenverfahren. Sie ersetzen das unsichere Kopf- und Fingerrechnen durch den protokollierten Übertrag. Das Kopf- und Fingerrechnen besitzt keine Zeugen. Rechenfehler fürchten die Kaufleute so sehr wie die Seeleute Piraten und Wegelagerer. Um 1200 treffen sie auf ihren Rechenflächen auf ein Navigationsproblem. Wenn man zahlt, kann man sein Geld nicht behalten. Und wenn man es behält, kann man nicht zahlen. Auch die Zahlen auf der Schreib-

III II I

[376] Zur Zweidimensionalität Hermann Wagner 1982: 19.
[377] Albrecht Sauer1996: 159.

fläche gruppieren sich um eine Leerstelle. Was man an einer Stelle wegnimmt, muss man an anderer Stelle wieder hinzuzufügen. Abwesenheiten verwalten Anwesenheiten und umgekehrt. Will man sich absichern, braucht man eine Schrift, die das mobile Feld der An- und Abwesenheiten organisiert. Die Kaufleute und die Navigatoren reagieren ähnlich. Sie verwenden ein System, das schreibt und nicht schreibt. Es protokolliert die Überträge von Waren und Menschen auf der Schreibfläche flexibel mit Linien.

Zu Beginn des 15. Jahrhundert setzen die Kaufleute überwiegend auf die Schrift und ihre Überträge, die sie mit ihrer Buchhaltung perfektionieren. Doch davor ereignet sich ein Unfall, der europaweit die Gemüter erhitzt. Um 1200 stellt der Vierte Kreuzzug die Frage nach dem Übertrag noch einmal neu. Sie entzündet sich an der Mobilität von Körpern und Stimmen. Am Anfang steht ein Vertrag. 1201 bindet er die Reisepläne der Kreuzfahrer, vertreten durch Geoffrey de Villehardouin, dem Gesandten des Herzogs der Champagne, an den Tatendrang eines blinden Mannes im achten Lebensjahrzehnt, dem Dogen Enrico Dandolo. Dieser Vertrag legt den Transport und die Verpflegung von 4500 Rittern und Pferden, 9000 Knappen und 20 000 Mann Fußvolk in die Hände Venedigs. Im Gegenzug erwartet Venedig die Zahlung von 94 000 Silbermark und die Beteiligung an Land- und Beutegewinn. Diese Geschichte erzählt eine Chronik. Fragt man, wer da spricht, so bleibt die Chronik keine Antwort schuldig. Es ist

> Geoffroy, der Marschall der Champagne, der dieses Werk verfaßt hat und seines Wissens nicht ein unwahres Wort gesagt hat und der bei allen Beratungen zugegen war.[378]

Doch Geoffroy ist nicht nur ein Zeuge. Der Marschall ist kein ohnmächtiges Medium. Er ist kein Bote, der liest und spricht, was andere ihm eingeben. Er antwortet mit seinem Amt des Prokurators. Die Prokuration überträgt die Befehlsgewalt auf den Boten und beschleunigt im späten 12. Jahrhundert Kommunikation. Die Prokuration führt dieser Chronik die Feder. Als Prokurator notiert Geoffroy in einer bemerkenswerten zirkulären Schrift nicht mehr das, was sein Herr, der Herzog der Champagne, ihm diktiert, sondern schließt die Schrift mit der eigenen Rede kurz. Er macht die Chronik zum Gesetz all dessen, was er kraft seines Amtes sagen kann. Und was könnte das sein? Was macht ihn zum Gesetz all dessen, was er sagt?

III II I

[378] Geoffroy de Villehardouin 1998: CXX, 46

Die Anführer des Vierten Kreuzzugs kamen überein, sechs Gesandte zu wählen, die in ihrem Namen den Kreuzzug organisieren. In der Chronik heißt es dazu:

> Diesen sechs übertrugen sie vollständig ihre Angelegenheit, indem sie ihnen gute Dokumente mit anhängenden Siegel gaben des Inhalts, daß sie unverbrüchlich das halten würden, was diese sechs in allen Meerhäfen, wohin immer sie gehen würden, abmachen würden, und alle Abmachungen, die sie treffen würden.[379]

Kommunikation, die so sehr auf Anwesenheit setzt, bezieht ihre Ordnung von Absenzen. Sie braucht Stellvertreter und favorisiert Personal, das in der Ferne Anwesenheit erzeugen kann. Darum überträgt der Brief das *imperium* den Gesandten. Er regelt, wer mit wessen Stimme spricht, wer befiehlt und wer gehorcht. Was die Stimmen dagegen sprechen sollen, darüber schweigt er. Denn er mandiert den Oberbefehl als Leerform an die Boten. Der Brief überträgt also keine Daten, sondern Befehlsgewalt. Das Amt des Prokurators sei es, schreibt William Droghuda 1240 »das zu tun, was sein Herr tun würde, wäre er anwesend«.[380] Die sechs Gesandten sind nicht nur Abbilder ihrer Herrn. Sie tilgen sie: Der Brief macht aus Herren Knechte. Den Knechten aber ermöglicht er, »alle Angelegenheiten gleich den Herren zu regeln«.[381] So besteht zwischen Bote und Prokurator ein entscheidender Unterschied.

> Ein *nuncius* ist der, der den Platz eines Briefes einnimmt; und er ist gerade so wie die Elster[...] er ist die Stimme des Fürsten, der ihn sendet, und er wiederholt die Worte des Fürsten,

schreibt Azzo von Bologna auf der Schwelle zum 13. Jahrhundert.[382] Während Boten mit der Zunge ihres Herrn sprechen, sind die sechs Gesandten nicht nur Sprachrohr. Sie sind nicht nur Elstern und eitle Schwätzer. Boten erinnern die Befehle ihrer Herren. Sie lesen. Prokuratoren dagegen schreiben die Befehle ihrer Herren. Sie sind das Imperium. Sie sind das Gesetz.

Nachdem die Gesandten Venedig als Ziel ihrer Reise wählen, dem Dogen Dandolo den Brief überreichten, sagt dieser:

> »Sagt nun, was ihr möchtet.«

Wie sehr ein System, das auf Tilgungen beruht, Unordnung provoziert, macht der Fortgang der Geschichte offensichtlich. Die Überfahrt von Venedig nach Konstantinopel ist wie eine Neunerprobe. Sie zeigt, in welchem Ausmaß die Gesandten sich verrechnet haben. Nur ein Viertel derer, in dessen Namen die

III II I

[379] Geoffroy de Villehardouin 1998: XIII., 23.
[380] Zit. n. Gaines Post 1943: 361.
[381] Geoffroy de Villehardouin 1998: 21.
[382] Donald Queller 1997: 47 f.

Gesandten den Vertrag abschlossen, erscheinen. Da die nur 10 000 Franzosen, so sehr sie sich auch bemühen, die Summe nicht aufbringen können, müssen sie 2 Jahre im Namen Venedigs ihre Insolvenz durch Eroberungen tilgen. Erst der Fall Konstantinopels macht sie schuldenfrei. Doch die Mediengeschichte dieser Chronik kennt keinen Sieg. Geoffroy , »der … seines Wissens nicht ein unwahres Wort gesagt hat und bei allen Beratungen zugegen war«, erzählt wenigstens diese Geschichte unbestechlich und genau. Sie zeigt, wie Kommunikation, die auf Anwesenheit und Teilhabe setzt, hart am Wind segelt, wenn sie die Daten nicht mit ihren Sendern abgleicht. Prokuratoren funktionieren nicht anders als die Fünferbündelung auf dem Rechenbrett. Sie reduzieren die Vielzahl der Stimmen auf eine einzige Stimme, die nunmehr anstelle der anderen spricht. Doch gerade diese oralen Komprimierungsverfahren, die keinen Speicher kennen, machen Überträge zur Quelle von Fehlern. Die Prokuration mag Kommunikation beschleunigen. Und dennoch kann sie einen fehlerfreien Übertrag niemals garantieren. Denn der Brief enthält keine Daten. So sprechen die sechs Gesandten im Namen ihrer Herren und mit ihren Namen anstelle dieser. Kraft ihres Amtes, handeln sie den Vertrag aus. Sie sind es, die im Namen von 35 000 Mann sagen:

> »Wir stimmen dem zu! Wir stimmen dem zu!«.

Doch die Zustimmung hat es in sich. Während die Chronik mit einer Anwesenheitsliste beginnt – sie zählt auf, wer das Kreuz nimmt –, beginnt die Kreuzfahrt mit einer negativen Aufzählung. Die zweite Liste nennt Personen, die nicht die Passage über Venedig nehmen. Für eine Kommunikation, die Anwesenheitslisten führt, ist jeder negative Eintrag ein Übertragungsfehler. Stellvertretung, das zeigt das *imperium* der Gesandten, erhöht nicht nur den Befehlsdurchsatz. Sie erhöht auch die Fehlerrate. Wie bei den römischen Vorfahren beruht auch die Befehlsmacht der Prokuratoren auf Dezimierung. Die Boten müssen ihre Herren dezimieren, um mit ihren Stimmen sprechen zu können. Und so ist jedes Wort, das den Mündern der Gesandten entkommt, ein Schlag. Der Übertrag der Befehlsgewalt hat also einen hohen Preis. Denn jedes Wort beruht auf Tilgungen. Der Brief, der ihre bedingungslose Befehlsmacht bezeugt, bereinigt die Rechnung. Er macht aus Gesandten Caligulas.

Über einen blinden Garanten des erfolgten Übertrags, den 14 Schwüre zu Fall bringen

Um ihren Teil des Vertrages einzulösen, müssen 1202 noch die Hälfte der waffenfähigen Venezianer die Schiffe der Franzosen begleiten. »Nun mögt ihr eine erstaunliche Heldentat hören«, schreibt Villehardouin:

> Der Herzog von Venedig, der ein alter Mann war und überhaupt nichts sah, stand in voller Rüstung vorn in seiner Galeere und hatte das Banner des Heiligen Markus vor sich. Und er rief den Seinigen zu, sie sollten ihn an Land setzen, sonst würde er sie an ihren Körpern strafen.[383]

Selbst der blinde alte Dandolo steht beim Angriff auf Konstantinopel am Bug seiner Galeere. Auch wenn seine Augen nicht sehen, seine Füße keinen festen Stand haben, ist er der lebendige Garant für den erfolgreichen Übertrag. Fehler quittiert er mit Duellen. Die Feder hat noch nicht den Dolch ersetzt.

Ökonomische Operationen erfordern im Vierten Kreuzzug noch die Anwesenheit der Kaufleute. Auf das größere Volumen von Transportfällen antwortet Venedig mit neuen und noch größeren Schiffstypen.[384] Der portable Kompass ermöglicht es ihnen, nicht nur einmal, sondern zweimal im Jahr ihre Schiffe nach Osten und Westen zu lenken.[385] Aber ein Handel, der so sehr auf Anwesenheit setzt, kann nicht endlos expandieren. Er muß — um nicht zu kollabieren — ab einem gewissen Volumen von Körper- auf Schriftpräsenz umschalten. Hieb- und Stichfestigkeit ist fortan nicht mehr eine Eigenschaft von Körpern. Sie wird zu einer Eigenschaft von Schriftstücken.

Der Übergang vom Duell zum protokollierten Übertrag geschieht nicht allmählich. Es ist kein Wandel. Es ist ein Schnitt. Oralität, für die der blinde Dandolo am Bug seines Schiffes so sichtbar und todesmutig einsteht, wird im neuen Handelssystem funktionslos. Spätestens zur Mitte des 13. Jahrhunderts führen die Routen der Kaufleute nur noch vom Kontor zum Rialto und zurück. Reisen werden an Stellvertreter delegiert. Faktoren und Kommissions-Agenten sind das Personal der neuen Schriftlichkeit. Sie besiedeln die Flottenstützpunkte. Zentrum und Peripherie kommunizieren über einen nicht abreißenden Strom von

III II I

[383] Geoffroy de Villehardouin 1998: CLXXIII, 58.
[384] Vgl. dazu Richard W. Unger 1980: 150-52 und John H. Pryor 1988: 30 f.
[385] Vgl. John H. Pryor 1988: 87 f und Amir D. Aczel 2001: 103. Zur Geschichte des Kompasses mit weiteren Literaturhinweisen s. auch Lynn White, Jr 1962.: 132 f.

Briefen, Wechseln und Verträgen. Sie versorgen die Stellvertreter mit Befehlen, ihre Herren mit neuen Informationen, die diese wiederum in neue Befehle wandeln. Die neuen Stellvertreter reden nicht mehr mit gespaltener Zunge. Die Schriftlichkeit sorgt dafür, dass jedes Schiff seinen Hafen und jedes Soll sein Haben findet.

In einem Arbeitsvertrag, der zwischen dem Faktor Ugo Gigone und einer Gesellschaft in Siena geschlossen worden ist, heißt es:

> Im Jahr des Herrn 1282, am 3. Tag vor den Iden des Oktober.
>
> Ich Ugo, Sohn von Ugolino Gigone des Älteren ... verspreche und treffe ein Abkommen mit Dir, Alessandro und Herr Giovanni, Sohn von Salimbene des Älteren. Ich erhalte hiermit die Erlaubnis, in deinem Namen und im Namen deiner Partner und der Gesellschaft der Salimbeni als Faktor und Agent von Allerheiligen an die folgenden vier Jahre zu deinem Vorteil zu arbeiten. Und ich verspreche, dorthin zu gehen und zu verweilen, wo immer Du es wünschst .... Wo immer Du mich hinführst und anordnest, in deinem Namen Geschäfte und Gewinne zu machen, werde ich ohne jede betrügerische Absicht vertragsgemäß und guten Gewissens zu deinen Gunsten und für deine Gesellschaf arbeiten.

Vor jedem Vertrag herrscht Mündlichkeit. Sie führt die Vertragspartner, Schreiber und Zeugen im Büro des Notars zusammen. Aber Formeln wie »ich schwöre«, »ich verspreche … und ebenso verspreche ich … und ferner verspreche ich«, diese Formeln dienen nur dazu, Agenten gefügig zu machen, sie auf die neue Präzision der Schriftlichkeit einzuschwören. Gerade weil der Faktor ein Produkt der Schriftlichkeit ist, ist der Gehorsam absoluter als jede Mündlichkeit ihn befehlen könnte. 14 Mal lässt der Vertragstext Ugo Gigone »…ich verspreche…« sagen. Dann läßt er ihn schwören, mit der Hand das Hl. Gesangsbuch berührend, nur ihm — dem Text — vollständig und mit unbedingter Disziplin zu folgen. »… ich verspreche …«, sagt Gigone, um fortan zu schweigen. Der Vertrag verpflichtet ihn, als Agent die Feder zu führen. Über alle Handelsaktionen, die er auf Geheiß seines Herrn in der Fremde ausführt, hat er Buch zu führen, auf Befehl zu bilanzieren, so schreibt es ihm sein Vertrag vor:

> Und ich verspreche Dir, zurückzukehren und Dir oder einen anderen von Euch oder jeden, den Du brieflich, mündlich, oder vertraglich dazu vorsiehst, eine korrekte und vollständige Buchführung zu übersenden ... Alle Waren, die durch meine Hände gingen, verspreche ich, auf Anordnung Dir zu übersenden, wann immer und wie oft du anfragst, es anordnest oder auch nur bekundest.[386]

Zur Kontrolle werden alle Handelsaktionen doppelt angeschrieben: Stellvertreter antworten auf Verträge mit Verträgen.

> Barcelona, den 9 August 1252
>
> Hiermit sei bekanntgegeben, dass ich, Arnau Fabriz von dir Bernat Fuentes in comanda 140 barcelonische Pf. s.4 d.5 übernommen habe und sie in 5 Stück

[386] Robert S. Lopez & Irving W. Raymond 1990: Nr. 105.

> Kleidung aus Saint Quentin und 5 Sarazenen angelegt habe – und dies, obwohl Du abwesend bist und getrennt von deinen Gütern bei dieser Reise, die ich mit dem Schiff des Ferrer Descoll und seinen Partnern nach Syrien unternehme oder wo immer das Schiff anlegen mag, um Handel zu treiben.[387]

Die Gesandten und Agenten stehen für zwei unterschiedliche Systeme. Beide verdoppeln. Die Gesandten verdoppeln die Stimmacht, die Agenten Verträge und Bücher. Doch die Gesandten arbeiten nicht mit Identitäten. Sie arbeiten mit Ersetzungen. Der Übertrag der Befehlsgewalt kann nur gelingen, wenn Herren sich durch ihre Knechte tilgen lassen. Die Briefe, Verträge und Bilanzen oder das Papierbüro sind das sichtbare Ende der römischen X. Der protokollierte Übertrag setzt auf exakte mechanischen Wiederholungen. Die Verträge verpflichten Ugo Gigone zur Schriftlichkeit. Sie machen ihn zu einem Bewohner der Schreibfläche. Er schwört, dass er sie niemals verlassen wird. Jeder Schritt, den er unternimmt, hinterlässt Spuren auf der Schreiboberfläche. Während Villehardouin ein Stellvertreter der ungemerkten Tilgung ist, die auf Treu und Glauben beruht, löst sich Gigone kein Jahrhundert später durch Buchhaltung aus dem Schatten der X. Er folgt der 0, jenem sichtbarem Zeichen der Tilgung, das schreibt und jede Bewegung protokolliert.

Noch einmal über die Wiederholung

Machten die Wiederholungen die Benutzung der akrophonischen und römischen Zahlzeichen unhandlich, werden sie hier zum entscheidenden Vorteil des neuen dezimalen Stellenwertsystem. Während die Wiederholung, die additive Reihung der Einheiten, die römischen Zahlzeichen von jeder Schrift ausschloss, werden die Ziffern über die Null zur Schrift der Zahlen. Erst die Ziffer und die mechanische Wiederholung erlauben es, Bewegung anzuschreiben. Sie ermöglichen es, Zahlwege zu kodieren. Darum schwören die Kaufleute nicht nur ein Teil der arbeiten die Kaufleute der Schreibfläche mit genauen mechanischen Wiederholungen, wenn sie schwören den Anweisungen der Gesellschaft bedingungslos zu folgen.

III II I

[387] Robert S. Lopez & Irving W. Raymond 1990: Nr. 87.

Die Geschichte exakter Wiederholungen beginnt darum nicht erst mit Gutenberg. Schon vor Gigone, bereits um 1200 kommen Techniken auf, die Bilder, Buchstaben und Zahlen exakt reproduzieren können. Mit der Einführung der indisch-arabischen Zahlen, der Doppelten Buchführung und der Kunst der Hafenfindung sollen hier exemplarisch drei Bereiche behandelt werden, in denen die Werkzeuge der exakten Wiederholung und des protokollierten Übertrags genauer betrachtet werden. Dabei wird ersichtlich, dass Mediensprünge nicht linear ablaufen. Nichts könnte exakter den Augenblick des Bruchs oder den Ort eines Einschnitts bezeichnen als zwei Systeme, die gänzlich inkompatibel sind, und dennoch dieselbe Zeit und derselbe Ort in eine Gleichzeitigkeit zwingen. Um 1200 stehen zwei Kulturtechniken – das Imperium der X und die Herrschaft der Ziffer – unverbunden nebeneinander. Der vierte Kreuzzug und das Erscheinen des *Liber Abaci* sind zwei Ereignisse, zufällig und chaotisch, die als Sequenz gelesen einen Schnitt erzeugen. Doch was wird sichtbar?

Hundert Jahre später ist die Anwesenheit des Kaufmanns endgültig durch die Anwesenheit der Schrift ersetzt. Versicherungen, Papiergeld, Buchführung sind die neuen körperlosen Medien der Seemacht. Zwar hat der Doge nicht umsonst den Oberbefehl über alle Werftarbeiter und Kalfaterer der Lagune inne. Denn Schiffe sind die Grundlage seiner Macht.[388] Aber bereits um 1300 besteht eine Seemacht weniger aus Häfen und Schiffen. Die Zentraleinheit der Seemacht hört nicht mehr auf die Stimme Dandolos. Sie ersetzt die Körper durch Fernmedien: Bücher, Wechsel, Verträge. Erst sie können die gigantische Anzahl von Transportfällen taktgenau speichern und übertragen. Die Peripherie braucht keinen Raum: Sie existiert nur in der Fläche. Sie diktiert allen Subjekten strikte Schriftlichkeit. Mit zunehmender Expansion existiert Seemacht nur noch als Übertrag. Sie gründet auf Schreibflächen: auf Ziffern und Buchführung. Noch bei Dandolo entscheidet über Missions-, Militär- oder Handelserfolg unterschiedslos die Macht über den Raum und über die Transportmedien. Kein Jahrhundert später ist Seemacht nicht mehr der Effekt schnellerer, besserer, größerer Schiffe. Um 1300 beginnen Kaufleute sesshaft zu werden. Sie operieren von städtischen Basen.[389] Denn die

[388] Vgl. Frederic C. Lane 1980: 83.
[389] Vgl. Philipp Jones 1997: 161.

doppelte Buchhaltung hat den Transport zu einer Operation der Schreibfläche gemacht.

> Nicht die Gewässer verbinden die verschiedenen Regionen des Mittelmeeres, sondern die Völker, die an den Küsten leben. Eine banale Erkenntnis, die jedoch immer wieder betont werden muß – besonders in diesem Bereich, wo zahllose irreführende Formeln und Bilder den Blick beliebig verstellen,

schreibt Braudel.[390] Doch Menschen mögen Entfernungen überwinden, Städte bevölkern, Straßen verstopfen. Und dennoch sind sie nicht Imperium. Vielmehr sind sie die Stellvertreter einer Befehlsmacht, die Meilen überwindet. Im Empire sind sie die Extension des Seekabels.[391] Im Mittelmeer des 14. Jahrhunderts sind sie die Agenten einer Büromacht. Banken, Bilanzen, Konten, Frachtbriefe, Wechsel, Verträge steuern nunmehr Verkehrsflüsse: Zahlen und Papier bestimmen so sehr den Handel, dass Benedetto Cotrugli 1458 in der *Della mercatura et del Mercante perfetto* schreiben sollte:

> Wenn Du einen Kaufmann siehst, dem die Feder lästig fällt, oder der sie ungeschickt handhabt, so kannst du behaupten, er sei kein Kaufmann.[392]

Reduziert auf ihre Federn, sind Kaufleute nicht mehr als Schreib-Maschinen. Denn ihr Imperium prozessiert über Schrift. Göttliche Datenverarbeitung kann auf Mündlichkeit setzen, höfische Literatur Mündlichkeit emulieren. In den Notationssystemen der Wirtschaft ist Mündlichkeit unerwünscht. Sie wird zur Quelle von *vielen Zwistigkeiten, Streitigkeiten und Ärgernissen* (*molti litigi, questioni, et scandali*):

> Und es ist gewiß, der Kaufmann darf sich nicht auf das Gedächtnis verlassen, zumal solches Vertrauen viele Täuschungen zur Folge gehabt hat,

schreibt Cotrugli.[393] Die Kaufleute sind so sehr zur Extension ihrer Rechenflächen geworden, dass Cotrugli die Mahnung al-Uqlidisis auf die Kaufleute übertragen hat. Darum setzt auch die Büromacht nicht mehr auf das Gedächtnis. Sie ist kein Umschlagplatz der *vox divina*. Sie entstammt nicht der Seele, sondern der Feder, dem Papier, der Ziffer. Deshalb rät Cotrugli dem Kaufmann, Warenflüsse nicht dem Gedächtnis anzuvertrauen, sondern seinen Büchern, die er gewissenhaft zu führen habe. Er habe drei Bücher anzulegen: das Journal, das Memorial und das Hauptbuch. Das Journal enthält die Summe seines Kapitals. Das Hauptbuch

III II I

[390] Ferdinand Braudel 1998: I 399.
[391] Vgl. Daniel R. Headrick 1981: 157 - 163.
[392] Benedetto Cotrugli 1906: 30.
[393] Benedetto Cotrugli 1906: 32.

überträgt das Kapital in alphabetische Ordnung, so dass ein Zugriff jederzeit möglich ist. Das Memorial enthält schließlich alle Geschäftsvorgänge des Tages:

> Im Memorial musst du jeden Abend oder Morgen, bevor du ausgehst, alles und jedes eintragen, worin du am genannten Tage gehandelt, welche Abschlüsse du für Rechnungen deines Geschäfts gemacht hast, sowie auch alle anderen notwendigen und erforderlichen Fälle, als Verkäufe, Einkäufe, Zahlungen, Empfänge, Sendungen, Anweisungen, Wechsel, Spesen, Versprechen und alle anderen Geschäftsfälle, bevor sie in das Journal eingetragen werden ....[394]

Ein Vormerkbuch (*un libriccino piccolo della ricordanze*) dient als Zwischenspeicher. Es verzeichnet stündlich auch die kleinsten Geschäfte, die dann in die anderen drei Bücher übertragen werden. Ferner, so Cotrugli, nehmen zwei weitere Bücher Kopien von abgehenden Briefen und ausgehenden Rechnungen auf. Die eingehende Post ist mit dem Empfangsdatum zu versehen. Sie sei monatlich zusammen mit den Kontrakten, Urkunden, Handschriften, Wechseln, Rechnungen, Policen geordnet und gebündelt in speziellen Ablagen der Schreibstube zu hinterlegen, fordert Cotrugli. Nicht nur die Bücher, auch loses Schriftgut und die Schreibstube samt ihren Möbeln werden der alphanumerischen Ordnung unterworfen. Sobald Wirtschaft vom Tausch auf Zahlung / Nichtzahlung umstellt, bedarf sie nicht nur der Schrift, sondern der Kompatibilität von Speicher und Datum, von Raum und Schreibfläche. Erst dann können Operationen und Waren auf Papier übertragen werden, loses Schriftgut in Bücher übergehen. Fortan steuern die Routinen der Bücher die Routen der Waren.

Zwar übertragen die Skriptorien der Klöster die Schriften der Antike. Aber ihre Bibliotheken vertrauen der Memoria: dem temporären Gedächtnis des Bibliothekars. Lesen und Schreiben sind noch getrennt, und dies nicht nur in der Buchproduktion. Klöster speichern, um den Zugriff auf Datenmengen zu kontrollieren. Kontore speichern, um die Datenmengen selbst zu kontrollieren. Eine Technologie, die den Zugriff auf Datenmengen optimiert, sollte sich zuerst in den Notationssystemen der Wirtschaft ausbilden. Von dort findet sie erst knapp fünf Jahrhunderte später ihren Weg in die Zettelkästen der Bibliotheken.[395] In der Wirtschaft hingegen disziplinieren seit dem 13. Jahrhundert Zahlen, Alphabete und umfangreiche Indices die Schrift und das Papier, das sie speichert. Kaufleute, reduziert auf ihre Federn, angeschlossen an ihre Bücher, sind Buchmaschinen:

| | | | | |

[394] Benedetto Cotrugli 1906: 32 f.

[395] Zu den Anfängen des Zettelkastens, zum Zettelkatalog der Wiener Hofbibliothek: Markus Krajewski 2002: 57.

Mechanische Geräte, die das Rechnen mit großen numerischen Datenmengen ermöglichen. Von Turings Wunsch, eine tintenbetriebene Schreibmaschine zu besitzen, führt ein gerader Weg zur Universalmaschine.

Buchhalter stehen am Anfang einer Bürokratie, einer Herrschaft von Schreibflächen, die erst Turings Papiermaschinen in Eisenware wandelt. Agenten wie Gigone, Gebilde aus Feder, Papier und Tinte, stehen am Anfang numerischer Datenverarbeitung. Aber die Geschichte Universalmaschinen beginnt nicht nur bei Ugo Gigone, den Sekretären, Buchhaltern und Kontoristen. Buchhalter, die mit Papier, einer Feder und strengen Instruktionen ausgestattet sind, haben den Transport modifiziert. Sie haben den Raum in Zeilen, Zahlen und Spalten gebannt. Navigieren erfordert nun nicht mehr das Setzen der Segel: Zwei Buchungen genügen, um mit Papier und Ziffern ein Heer von Kreuzrittern zu bewegen, Waren wie Zahlen fehlerfrei von einer zur anderen Stelle zu übertragen. Wie die Schreibflächen der Arithmetik der Wirtschaft das Feld bereiten, damit die Bücher der Agenten zum Ort der neuen zum Ort einer neuen Codierung werden, will ich im folgenden untersuchen.

WEG UND ZAHL

Die Medien, die die Wirtschaft ab 1200 so effizient gestalten, sind der Effekt einer Ware, die Kaufleute von Ost nach West importieren. Diese Ware, ein 10-teiliges Set von Symbolen, sind die indisch-arabischen Zahlen. Bevor sie Waren vom Schreibtisch fernsteuern, vor 1200 müssen sie sich ihren Weg von Bagdad Mallorca, Sizilien oder Cordoba nach Europa bahnen. Ein Geograph und Kaufmann persischer Abstammung, Ibn Khordadhbeh, zeigt um 847 in seinem Itinerar den Weg, auf dem die Zahlen im Tausch gegen Eunuchen, Sklavinnen und Marderfell nach Europa gekommen sein könnten. Im *Buch der Straßen und Provinzen* heißt es:

> Die Kaufleute sprechen arabisch, persisch, römisch [griechisch und latein], französisch, spanisch und slawisch. Sie reisen von West nach Ost, von Ost nach West, manchmal zu Land, manchmal zu Wasser. [...] Sie schiffen in Frankreich ein. Sie fahren über das Mittelmeer nach al-Farama [Pelusium]. Dort laden sie ihre Waren auf Kamelrücken und erreichen über Land nach fünf Tagen und 25 Meilen al-Kolzum [Suez]. Dort segeln sie über das Rote Meer und erreichen al-Djar, den Hafen von Medina, und Djodda, den Hafen von Mekka; von dort kommen sie nach Indien und China. [...] Diese Reisen können auch über Land durchgeführt werden.

> Die Kaufleute aus Frankreich und Spanien begeben sich zunächst nach Sous al-Akza (Marokko), und dann nach Tanger, später erreichen sie Kairouan (Tunesien), und die Hauptstadt Ägyptens. Von dort kommen sie nach Al-Kamla, erreichen Damaskus, Al-Kûfah, Bagdad und Basra, erreichen über Ahvâz Fars, Kriman, Indien und China.[396]

Was Ibn Khordadhbeh beschreibt, ist um 1200 noch immer die Generalkarte aller Strassen, auf denen die Waren von West nach Ost, von Ost nach West wandern. Auf ihr wird der Raum sichtbar, in dem sich Kaufleute bewegen. Er ist keineswegs homogen und zerfällt selten in Länder, häufig hingegen in Sprachen und Orte, die alle unterschiedliche Münzen und Gewichte verwenden. Kaufleute, die weite Entfernungen überwinden, Währungen und Mengenangaben umrechnen, operieren in verschiedenen Zahlsystemen. Sie führen ein Leben im Übertrag. Diese Kaufleute transportieren um 900 zuerst das Wissen von der Null mit Muskat, Aloeholz und Kampfer von Ost nach West, von Bagdad und Basra nach Spanien und Frankreich.[397]

Rund drei Jahrhunderte später lernt ein Agent einer pisanischen Handelsgesellschaft, von dem nur sein Spottname Bonaccius, der Gute, überliefert worden ist, in Bougie (Bejaïa), einer nordafrikanischen Hafenstadt die Vorzüge der neuen Zahlen kennenlernen. Von dem Nutzen der Zahlen überzeugt, schickt er seinen Sohn von Pisa nach Bougie. Dort lernt der Sohn von einem Rechenmeister, mit den neuen indisch-arabischen Zahlen umzugehen. Der Sohn des Guten, Filius Bonaccii, folgt seinem Vater. Auf Handelsreisen durch Ägypten, Syrien, Griechenland, Sizilien und der Provence — auf den Straßen Khordadhbehs — lernt er schließlich alle Verfahren, die sich an diese Zahlzeichen anschließen. Nach Pisa zurückgekehrt, fasst er sein Wissen 1202, im Jahr des 4. Kreuzzugs, in 15 Abschnitten zusammen.[398] Es mag ein Zufall sein, dass im Westen des Mittelmeers, ein Diskursmodell in maximaler Auflösung erscheint, das im Osten bereits zu verschwinden droht. Dort, im Westen, erreichen Geschäftspraktiken, die auf Transport und Anwesenheit setzen, ihr Maximum. Hier, im Osten, an der Peripherie, in den Faktoreien formieren sich Techniken, die auf Navigation und Abwesenheit setzen. Just in jenem Jahr, in dem der Vertrag Dandolos ganz in der Ökonomie der Körperpräsenz operiert, erscheint das *Liber Abbaci*, dessen Inhalt

[396] Abu'l Kâsim Obaidallah ibn Abdallah ibn Khordâdbeh Kitâb al-Masâlik wa'l-Mamâlik: 114 f.
[397] Smith / Karpinski 1911: 102.
[398] Fibonacci 1202/1857: 1.

bald so sehr für die neue Ökonomie der Schrift stehen sollte. Der erste Abschnitt stellt das Werkzeug vor: die zehn Zahlzeichen der Inder, die folgenden Kapitel die Grundrechenarten, die Bruchrechnung, das Gesellschaftsrechnen, die Mischung von Münzen, das Auffinden von Quadrat- und Kubikwurzeln und die Regeln der Algebra. Das *Liber Abbaci* zielt nicht mehr auf das Rechenbrett. Fibonacci mag hier den Arabern gefolgt sein, die mit *takht* lediglich die Staubtafel, aber kein Rechenbrett mehr bezeichnen. Während am Ende des 12. Jahrhunderts noch einmal die Prokuration Körper- und Stimmacht optimiert, durchmisst das Buch des Abakus, das eigentlich ein Buch der Schreibfläche ist, zur gleichen Zeit in 15 Abschnitten den gesamten Grund der Schrift. Auf den Feldern der Arithmetik, Algebra und Ökonomie definiert es die Regeln des protokollierten Übertrags.

Über die Zahlenbewegung

Die Kombination von Arithmetik und Ökonomie hat ihren Ursprung in Bagdad. Sie gründet auf der Null, auf der Mobilität von Zahlen. Das dezimale Stellenwertsystem vollzieht die Umstellung von Routen auf Routinen, indem es Transport zur Funktion von Zahlen macht. Der Anfang von al-Hwarizmis Schrift, das *Incipit*, ruft gleich zweimal Autoritäten auf. Und dennoch diktiert die Null vom ersten Satz an eine neue Zeit. In ihr ist Herrschaft von Religion in Arithmetik ausgewandert.

> Al-Hwarizmi hat gesagt: Wir wollen Gott, unserem Herrn und Beistand, das ihm zukommende Lob aussprechen, das ihm das *Geschuldete* abstattet und durch *Vermehren* sein Lob vervielfältigt ...,

so beginnt die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen.[399] Das geschuldete und vermehrte Lob bedingen einander. Sie funktionieren vollständig in der Logik von Soll und Haben. Die Unterscheidung von Soll und Haben ist keine Zutat des Kopisten. Vielmehr ist der Kredit seit der Mitte des 9. Jahrhundert in Bagdad allgegenwärtig. Der Handel mit Wechseln hat sich spätestens im 8. Jahrhundert etabliert. Schecks, persisch *sakka*, sind seit dem 10.

[399] Al-Hwarizmi Dixit Algorizmi: 1.1. (Incipit arismethica Achoarismi): 2-5. Eigene Hervorhebungen (G.M.).

Jahrhundert im Umlauf. Ein mehrstufiges Buchsystem verzeichnet jeden Handel mehrfach. Ein einfaches Papier dient als Gedächtnisstütze. Ein kleines Buch, *daftar*, das leicht im Ärmel eines Gewands Platz findet, enthält die Umsätze des Tages. Bücher enthalten Abschriften von Rechnungen. Sie verzeichnen alle Zahlungsein- und -ausgänge. Die Kopien dieser Bücher, die sogenannten *Wurzeln*, sind wie zu Zeit Ciceros auch vor Gericht als Beweismittel zugelassen.[400] Der extensive Gebrauch des Papiers und die Einheit von Soll und Haben geht also auf die Araber zurück, auch wenn nicht nachgewiesen werden kann, dass sie die Doppelte Buchhaltung erfunden haben.

Bevor al-Hwarizmi zeigen wird, dass die Einheit von Soll und Haben unmittelbar aus dem Zahlenvorrat der Ziffern hervorgeht, will ich nur kurz darauf hinweisen, wie sehr die neue Schrift der Buchhaltung sich an den Techniken der Wiederholung ausrichtet. Das macht ein Vergleich zwischen den Schriftgelehrten der Klöster und den Buchhaltern sichtbar: zwischen Cassiodor und Datini.

> Glücklich sein Vorhaben, löblich sein Eifer mit der Hand zu den Menschen zu predigen, Zungen mit Fingern zu lösen ...und gegen die unerlaubten Einflüsterungen des Teufels mit Feder und Tinte zu kämpfen«,

schreibt Cassiodor über die Kopisten.[401] Und an gleicher Stelle heißt es in den *Institutiones*:

> Jedes Wort, das der Kopist niederschreibt, fügt dem Teufel Wunden zu. [402]

Datini dagegen schreibt in einem Brief an seinen Agenten:

> Wenn ich noch einmal zur Welt kommen müsste mit dem geringen Wissen, das Gott der Herr mir verlieh, würde ich mich eher vor den Menschen hüten als vor dem Teufel. Mögest Du Dich um die Angelegenheiten der Firma kümmern in Schuhen aus Blei.[403]

Zwar fürchten beide Übertragungsfehler. Der Feind aber ist für Datini nicht mehr der Teufel. Mehr als den Teufel fürchtet er die Mündlichkeit, den Wagemut des blinden Dandalo, die Zunge der Prokuratoren. In den Notationssystemen der Wirtschaft ist Mündlichkeit unerwünscht. Sie wird zur Quelle von *vielen Zwistigkeiten, Streitigkeiten und Ärgernissen* (*molti litigi, questioni, et scandali*).[404] In der Wirtschaft disziplinieren seit dem 13. Jahrhundert Zahlen, Alphabete und umfangreiche Indices die Schrift und die Fläche, die sie speichert. Die *Institutiones*

I I I I I I

[400] Vgl. Jonathan M. Bloom 2001: 138-141.
[401] Cassiodori Senatoris Institutiones: I 30, 1.
[402] Cassiodori Senatoris Institutiones: I 30, 1.
[403] Zit. n. Iris Origo 1997: 139.
[404] Benedetto Cotrugli1906: 32.

lehren den regelgeleiteten Umgang mit dem Teufel. Datinis Hauptbücher dagegen erfordern exakte Überträge. Sie erfordern mechanische Wiederholung. Die Schuhe aus Blei, die Datini seinem Agenten so sehnlich wünscht, fesseln ihn an den Schreibtisch, seine Hand an die Feder, die Feder an die Bücher. Seitenzahlen, Alphabete, doppelte Bücher, Bilanzen kontrollieren die Kopien. Cassiodors Kopisten müssen glauben, um fehlerfrei zu übertragen. Datinis Schreiber hingegen rechnen, um fehlerfrei zu buchen. Wenn Buchhalter im späten 14. Jahrhundert Datinis Hauptbücher mit der Formel »nel nome di dio e di guadagno« beginnen, so darf man fragen, welchen Gott die Buchhalter anrufen. Denn die Ziffer ist längst zum Format einer neuen Schrift geworden. Dem Buchhalter muss demnach klar vor Augen stehen, dass Religion nicht mehr der Urgrund aller Autoritäten ist, sondern diese selbst abzählbar geworden ist. Glaubensbekenntnisse markieren nicht zufällig den Anfang von Hauptbüchern oder Algorismen. Neun Symbole und ein Kreis machen Religion unterschiedslos zum Datum von Multiplikation und Division, von Addition und Zerlegung. Gleich im Anschluss heisst es:

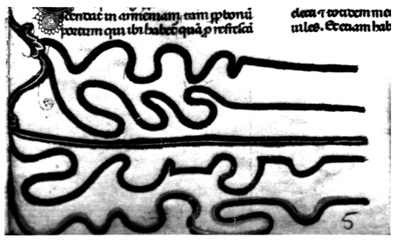


Fig. 38 – Landwege und Seewege: Routen und Routinen, Marino Sanudo 1321 (Degenhart & Schmidt 1973).

> Und wir wollen ihn bitten, dass er uns auf den Pfad der Geradlinigkeit und auf den Weg der Wahrheit führt,[405] ...

Wenn der Weg der Wahrheit der Weg der Geradlinigkeit ist, so spricht dies Bände. Doch noch bei den Arabern im 9. Jahrhundert verweist die Geradlinigkeit nur auf Euklid und die Wahrheit. 1321 hingegen ist die Wahrheit auf einer Karte verzeichnet. Ein Venezianer, Marino Sanudo der Ältere, sollte darauf 1321 aufmerksam machen. Es sei nicht mehr notwendig, die Kreuzfahrt zu Land zu planen, so wie es die Alten taten. Auf dem Land drohen Gefahren

> ... wegen der Länge und Schwere des Weges...[406]

Ein Kreuzzug, für den sein *Liber secretorum fidelium* mit Worten und Karten beim Pabst Clemens V. wirbt, soll deshalb den direkten Seeweg einschlagen. Eine Marginalie, die seine Erklärungen begleitet, macht dies sichtbar [Fig. 38]. Sie zeigt

I I I I I I

[405] -Hwarizmi Dixit Algorizmi: 1.1 (Incipit arismethica Achoarismi) 5-7.
[406] Marino Sanudo Liber secretorum: II 2,1 (37). Vgl. Degenhart & Schmitt 1973: 30.

gekrümmte Linien und Geraden: Landwege und Seewege.[407] Einigen Ausgaben von Sanudos Buch liegen Hafenkarten von Pietro Vesconte bei.[408] Sie führen noch einmal detailreich vor Augen, was die Marginalie in äußerster Kürze demonstriert: Landwege sind krumm und lang, Seewege kurz. Denn Seerouten sind höchst artifizielle Gebilde, die Zirkel und Lineal, dem Kompass und der Karte entspringen. Die Kürze der Seerouten, die hier zum Paradigma der neuen Wege wird, hat ihren Grund in neuen Speichertechniken, in neuen Zeichensätzen. Sie ermöglichen es, Adressen nicht nur kurz und prägnant anzuschreiben, sondern auch mit Leichtigkeit mit ihnen zu operieren. Die Bitte, mit der al-Hwarizmis Traktat über das indische Zahlenrechnen beginnt, schließt folgendermaßen:

> Und wir wollen ihn bitten,... dass er uns hilft bei unserer guten Absicht hinsichtlich dessen, was wir beschlossen haben darzulegen und zu erörtern über die Rechenweise der Inder mit Hilfe von 9 Symbolen, mit denen sie jede einzelne Zahl um der Leichtigkeit und abgekürzten Form willen darstellen, damit nämlich dieses Verfahren leichter wird für denjenigen, der sich um die Arithmetik bemüht, d.h. sowohl um eine sehr große als auch eine sehr kleine Zahl und um all das, was mit ihr geschieht an Multiplikation und Division, Addition und Zerlegung, und um die übrigen Dinge...[409]

Dass die Kürze von Seerouten ein nachträglich ist, zeigt die Vorgängigkeit von al-Hwarizmis Schrift. Die Kürze wird auf den Flächen der Mathematik erfunden. Bevor Geraden auf Hafenkarten kurze Seerouten anschreiben, sind Kürze und Leichtigkeit Eigenschaften von Ziffern, die sie gegenüber römischen Zahlen und ihren Rechenbrettern auszeichnen. Zurück zu Sanudo und seiner Marginalie. In Wahrheit konkurrieren bei ihm nicht Land- und Seewege miteinander. Vielmehr treten Routen und Routinen gegeneinander an. Die entscheidende Botschaft von Sanudos Abbildung ist nicht, dass es zu jedem Landweg einen Seeweg gibt. Sie zeigt vielmehr, dass jeden Weg Routinen begleiten. Und jeder Routine entspricht einer Operation in und auf der Fläche. In dieser Hinsicht ähnelt Sanudos Buch einem *Algorismus*. Es ist eine Gebrauchsanweisung zur Anfertigung eines Kreuzzuges – ein Buch der Straßen und Provinzen.

Die Null, die über al-Hwarizmis Schrift, den Weg von Ost nach West findet, überführt das Credo des *Incipit* nicht nur in eine Ökonomie der kurzen Wege. Sie macht die Religion der Kreuzfahrer nicht nur berechenbar. Das geschuldete Lob und das vermehrte Lob verweisen auf die Effizienz der neuen Flächen. In ihnen

III II I

[407] Abbildung in Bernhard Degenhart und Annegrit Schmitt 1973: 30.
[408] Vgl. Bernhard Degenhart & Annegrit Schmitt 1973: 64.
[409] Al-Hwarizmi Dixit Algorizmi 1.1. (Incipit arismethica Alchoarismi): 5, 8-18.

kann man Daten mit Routinen lenken und Räume durch Schreibflächen durchmessen und erzeugen.

Neben der Kürze und Leichtigkeit besitzt das dezimale Stellenwertsystem ein weiteres Merkmal. Es funktioniert topographisch. Zahlen werden nicht nur durch ihre Anzahl definiert, sondern auch durch den Ort, an dem sie stehen.

> Jede Eins bedeutet, wenn sie an der früheren [=ersten] Stelle steht, eins, an der späteren, zweiten Stelle aber 10, und was 10 an der späteren Stelle bedeutet, bedeutet eins an der früheren,

schreibt al-Hwarizmi.[410] Damit hat er vieles gesagt. Und das liegt an einem Tool: den Dezimalstellen. In der Handschrift C heißen sie zuweilen *mansio*: *Station*, *Lager*, *Wohnung* und *Aufenthaltsort*.[411] In der Handschrift N werden sie *differentia*, Unterschied, genannt. Sie bezeichnen den Aufenthaltsort der Zahlen. Er kann sehr flüchtig sein, wie etwa beim Zehnerübertrag, oder dauerhaft: Die binäre Codierung der Zahlen durch Anzahl und Adresse, macht die Ziffern transportabel. Man braucht allein ein endliches Set von Zeichen, die Zahlen [*litterae*] 1 bis 9, die jede beliebige Stelle einnehmen können, und Leerstellen, damit man die Zahlen bewegen kann. Bei al-Hwarizmi nicht Zahl, sondern nur der *circulus parvus*, der kleine Kreis genannt, wird die Null mit den Dezimalstellen eingeführt. Sie wird zum Inbegriff der binären Codierung — so sehr, dass das Wort *Ziffer* (Leere) zum Namen des gesamten numerischen Zeichenvorrates wird. Die Rechenbretter können Leerstellen nicht speichern. Eine Null wird durch keinen Stein bezeichnet. Nichts wird durch ein leeres Felder bezeichnet. Leere im Stellenwertsystem ist dagegen nicht nur Anzahl. Die Leere hat eine »Wohnung«, ein »Lager«, einen »Aufenthaltsort« Sie verbleibt im Speicher und ist berechenbar geworden. Im *Kapitel über die Vergrößerung und die Verringerung* führt al-Hwarizmi aus:

> Und wenn nichts übrig bleibt, so setze einen Kreis, damit die Stelle nicht leer ist, sondern [damit] sich an ihr ein Kreis befindet, der ihre Stelle einnimmt, damit die Stellen nicht zufällig, wenn sie leer ist, verringert werden und man glaubt, dass die zweite [Stelle] die erste ist, und du so in deiner Zahl getäuscht wirst.[412]

Der Wert der Zahlen hängt von den Adressen der vakanten Stellen ab. Von den vakanten Stellen beziehen sie ihren Namen, darum heißen sie Ziffern. Die Mobilität der Zahlen zeigt sich noch deutlicher in ihrem Gebrauch. Nachdem al-

III II I

[410] Al-Hwarizmi Dixit Algorizmi 1.5 (Incipit arismethica Alchoarismi): 106-110.
[411] Georges, Karl Ernst 1998: II 799.
[412] Al-Hwarizmi Dixit Algorizmi 2.1 (Capitulum augmentationis et diminutionis): 349-354.

Hwarizmi den Zeichenvorrat, die *Leere*, die *Einheit* und die *Differenz* definiert hat, führt er den Übertrag ein.

> Wenn ... an einer Stelle 10 oder mehr angesammelt sind, sollen sie zu der späteren Stelle gebracht werden, und es soll von jeder 10 eine Eins an der späteren Stelle gemacht werden. Wenn wiederum sich an derselben Stelle, zu der eine Zahl beim Ansteigen gelangt, eine andere Zahl befindet, so soll sie oberhalb hinzugefügt und zu einer anderen zusammengefügt werden u.s.f.[413]

Die Erklärung, so Folkerts, sei umständlich und warum das Ansammeln und Übertragen schon an dieser Stelle verhandelt werde, sei wenig einsichtig, da erst die Addition ihren Einsatz erfordere. Und dennoch machen die folgenden Ausführungen über die Grundrechenarten deutlich, dass Speichern und Übertragen keine peripheren Funktionen sind, sondern indische Zahlen vor den römischen auszeichnen. Denn *numerus* bezeichnet nicht nur »Anzahl« und »Zahl«, sondern bezeichnet mit der »Zahl« auch die »Stelle«. »Numerus« ruft nicht nur die »Reihe« auf. Es bedeutet auch »Regel« und »Rechenweise«. Dabei kommen der Null und Dezimalstelle eine entscheidende Funktion zu. Der Speicher operationalisiert die Leere und hält sie bereit für Überträge. Gerade weil die Ziffern einer Stellenwertlogik folgen, die auch die Leere anschreibbar macht, eröffnen sie im Gegensatz zu den römischen Zahlzeichen eine Art Verkehrsraum, der Routen in Routinen überführt. Die Vorzüge zeigen sich bei der Berechnung von kleinen und großen Zahlen, den Techniken der Division und Multiplikation, die die Zahl der Überträge maximieren. Zahlen werden ein- und ausgelesen. Ihre Adresse ist dabei abzählbar. Ein Übertrag bei der Multiplikation, an die an anderer Stelle noch genauer eingegangen wird, wird bei al-Hwarizmi etwa folgendermassen angewiesen:

> »Das aber, was sich bei der Multiplikation jeder Stelle ergeben hat, wirst du in die Stelle schreiben, die darüber ist ...«[414]

Al-Hwarizmis Ausführungen über die sechs Grundrechenarten (einschließlich Halbierung und Verdopplung) lesen sich wie das *Buch der Straßen und Provinzen*, allein dass dort, wo Khordadbeh die Namen der Straßen, die Namen der Städte nennt, bei al-Hwarizmi lediglich steht: erste Stelle, zweite Stelle, vorhergehende Stelle, nachfolgende Stelle, neue Stelle, alte Stelle, die rechte Stelle, die linke Stelle… . Die Verbindung von Zahlen, Straßen und Provinzen ist paradigmatisch für die neue Form der Arithmetik. Denn sie hat dasselbe Ziel: Wege möglichst

III II I

413 Al-Hwarizmi Dixit Algorizmi 1.7 (Incipit arismethica Alchoarismi): 201 – 211.

414 Al-Hwarizmi Dixit Algorizmi 4.2 (Capitulum in multiplicatione): 53.

genau zu beschreiben, um mit Überträgen fehlerfrei zu operieren. Die ersten beiden Abschnitte des *Incipit* beginnen mit

> Dixit Alchoarizmi [Algorizmi] ...

Algorizmi ist die latinisierte Fassung von al-Hwarizmi. Sie ist der Name eines Programms, das in den Gebrauch indischer Zahlen einführt. Und dies nicht nur, indem er alte Zeichen durch neue Zeichen ersetzt:

> Die Form der X ist folgende: $\boxed{10}$; und dies ist die Form der XX: $\boxed{20}$ und dies der XXX: $\boxed{30}$.[415]

Der Algorismus führt nicht nur in die Zeichen ein. Er beschreibt auch, wie man mit ihnen rechnet. »Dixit algorizmi« ruft in diesem Sinne keine Autoritäten auf. Es ist vielmehr eine Sequenz, die Befehle und Rechenvorschriften einleitet.

Wegbeschreibungen stehen am Anfang einer Geschichte der Routinen. Sie stehen am Anfang einer Geschichte symbolischer Maschinen.[416] Sie führen das Operieren mit Zahlen auf ein regelgeleitetes Operieren mit Zeichen in der Fläche zurück.[417]

> Die mittelalterliche Trennung in Zahlenschreiben (römisch) und in Rechnen auf dem Rechenbrett entfällt —: mit den Ziffern kann man zugleich rechnen,

schreibt Menninger.[418]

Worauf die Ziffern anfangs geschrieben werden, deutet al-Hwarizmi nur an einer Stelle kurz an. Nur im Kapitel über die Multiplikation erfährt der Leser, worauf er die Zahlen notieren soll. Eher beiläufig schreibt al-Hwarizmi im Kapitel über die Multiplikation, die Zahlen könnten *in tabula vel in quo volveris* — auf einer Tafel oder wohin du willst — geschrieben werden.[419] *Tabula* bezeichnet an dieser Stelle zwar kein Rechenbrett mehr, da die Ziffern im Vergleich zu den römischen Zahlen den Zwischenspeicher entlasten. Und dennoch operiert die *tabula* nicht vollständig in der Schrift. Denn al-Hwarizmis Tafel ist weder aus Wachs, noch aus Schiefer. Sie ist eine Art Behältnis: Ein Brett, das von einer Holzeinfriedung

III II I

[415] »Figura X est hec: $\boxed{10}$, et hec figura XX: $\boxed{20}$, et hec XXX: $\boxed{30}$,...« Al-Hwarizmi Dixit Algorizmi 1.5 (Incipit arismethica Alchoarismi): 130 ff. In den arabischen Handschriften stehen anstelle der römischen Zahlen Zahlwörter (Vgl. Adolf P. Juschkewitsch 1964: 28, Fußnote 26.
26).

[416] Vgl. Sybille Krämer 1988: 59 f.

[417] Karl Menninger: Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl. Göttingen 1978. Bd. 2. S.Vgl. Sybille Krämer 1988: 59 f.

[418] Karl Menninger 1978: II 259.

[419] al-Hwarizmi Dixit Algorzimi: VI (Capitulum in multiplicatione): 53.

umgeben ist und mit Sand oder Kreidestaub gefüllt ist. Die Holztafel speichert Zeichen als Routen, Routen als Bahnungen im Sand oder Staub der Tafel. Staubtafeln speichern die Spuren nicht dauerhaft. Sie haben keinen permanenten Speicher. Ein Windzug oder eine kleine Bewegung löschen die Zeichen unwiederbringlich. Aber die Tilgung ist nicht nur ein Fehler im System. Auf der Staubtafel wird das Löschen zur entscheidenden Operation. Die staubigen Finger, vor denen eindringlich al-Uqlidisi warnt, sind ein integraler Bestandteil der Rechnung. Sie übertragen das Reinigen des Rechenbretts auf die Fingerkuppe. Bei Rechnungen mit Übertrag werden die Zwischenergebnisse auf die vorhergehenden Zahlen geschrieben. Lesbar bleibt am Ende nur noch das Endergebnis. So auch bei der Division und Multiplikation – Rechnungen, die nur mühsam mit den römischen Zahlen ausführbar sind. Al-Hwarizmi löst die Multiplikation von $2326 \cdot 214$ mit einer Auflösung von $6 \cdot 2$ Zeilen. Die Zahlen werden versetzt angeordnet, sodass die letzte Stelle der ersten Zahl unter der ersten Stelle der zweiten steht. Al-Hwarizmi beschreibt die Ausgangsstellung so:

> Wenn wir zweitausend CCC und zwanzig in den Symbolen der Inder mit zweihundert und XIIII multiplizieren wollen, so setzen wir zweitausend CCC und zwanzig in den Symbolen der Inder an vier Stellen, und an der ersten Stelle nach rechts ist VI und an der zweiten Stelle zwei, die XX bedeuten, an der dritten aber drei, die dreihundert bedeuten, an der vierten zwei, die zweitausend bedeuten. Danach setzen wir unter 2000 eine IIII, dann an der nächsten Stelle nach rechts eine eins, die X bedeutet, danach an der nächsten Stelle eine zwei die CC bedeuten.[420]

Die Beschreibung ist für heutige Augen recht umständlich, zumal al-Hwarizmi keinen Gebrauch von den neuen Ziffern macht, sondern auf Zahlworte und römische Zahlzeichen zurückgreift. Diese Weitschweifigkeit durchzieht den gesamten Algorismus. So benutzt gerade der Text, der in den Gebrauch der neuen Ziffern einführen will, die alten Zahlsysteme. Doch man kann ahnen warum: Jede Aufgabe muss er zuallererst übersetzen. Das gilt besonders für die Multiplikation. Denn hier muss doppelt übertragen werden. Den Übertrag ins neue Zahlsystem der Ziffern findet man dagegen als Diagramm im Text. Nachdem die Ausgangsstellung mit Worten, Zahlzeichen und Ziffern hinlänglich beschrieben worden ist, kommt al-Hwarizmi zum eigentlichen Verfahren. Jede wird Zahl mit der ersten oberen Zahl multipliziert. Das Ergebnis in der oberen Zeile notiert. Zunächst ist die Tafel noch leer. Die Ergebnisse der ersten Multiplikation schreiben sich in die leeren Stellen ein. Und nur die letzte Zahl überschreibt die erste Stelle des

[420] Al-Hwarizmi 4.2.

Multiplikanden. Doch die Multiplikation optimiert die Tilgung und schnell wird klar, warum al-Uqlidisi die gekalkten Finger fürchtet. Um die zweite Stelle zu multiplizieren wird die untere Zahl vollständig gelöscht und um eine Zahl nach rechts verschoben:

> Und die erste Stelle der unteren Zahl wird unter der zweiten Stelle stehen, die der höchsten Stelle, die wir multipliziert haben, folgt, nämlich nach rechts. Danach stelle ihre Stellen nacheinander auf und multipliziere die Zahl, unter die wir die erste Stelle der unteren Zahl gesetzt haben, mit der letzten Stelle der oberen Zahl; danach mit der [Stelle], die [ihr] folgt, bis du sie alle durchlaufen hast, wie du es mit der ersten Stelle gemacht hast. Und was für uns aus der Multiplikation jeder Stelle angesammelt worden ist, das notieren wir oberhalb.

schreibt al-Hwarizmi und schon hier wird klar, dass die Multiplikation mit vakanten Stellen operiert.[421] Da die obere Zeile mit Zahlen gefüllt ist, erfordert nun jede Multiplikation der zweiten Stelle eine Tilgung. Und wenn ein Zehnerübertrag erforderlich ist, muss sogar zweimal pro Einzelmultiplikation eine Stelle gelöscht werden. So überschreiben die folgenden Schritte kontinuierlich Ausgangsstellung mit Zwischenergebnissen. Und auch der Rechenweg wird kontinuierlich gelöscht bis das Endergebnis schließlich an die Stelle der Ausgangszahl getreten ist. »Und immer«, schreibt al-Hwarizmi,

> wenn uns die Multiplikation zur ersten Stelle der unteren Zahl hinführt, tilgen [*delebimus*] wir all das, was an der obersten Stelle ist, die sich über ihr befindet, und wir notieren an dessen Platz das, was für uns aus der Multiplikation herausgekommen ist.[422]

2326	2326
4 2326	214
422326	
428326	
488326	2326
491326	214
492226	
496226	2326
496426	214
496486	
497686	2326
497746	214
497764	

Das Endergebnis löscht kontinuierlich von links nach rechts die Ausgangszahl [Fig. 34]. Man spart zwar mit diesem Verfahren Platz. Aber offenbar bezahlt man die Vorteile mit einer Art Unschärferelation. Speicherbar ist nur die Aufgabe *oder* das Ergebnis. Der Rechenweg und die Bewegungen der Zahlen aber werden gelöscht. So bedeutet Übertragen auf der Staubtafel Löschen – Zahlen anstelle von anderen setzen. Der Speicher wird überschrieben, die Adresse der vorhergehenden Zahl der nachfolgenden Zahl übergeben. Obwohl al-Hwarizmi in der Schrift agiert, kann er die Vorteile des dezimalen Stellenwertsystems nur marginal nutzen. Der Übertrag tritt zwar nun nicht mehr in Gestalt eines Sklaven

Fig. 39 – Die Zehnerüberträge und Tilgungen bei al-Hwarizmi, 2376·214 (G. M.)

III II I

[421] Ebd.

[422] Al-Hwarizmi 4.3 (Capitulum in multiplicatione): 57.

auf. Er ist zu einer Operation der Schreibfläche geworden. Und dennoch bleibt er ungemerkt. Zahlen ersetzen Zahlen bis das Ergebnis vollständig die Zwischenergebnisse getilgt hat.

Die Staubtafel al-Hwarizmis arbeitet zwar in der Schrift, aber sie gehorcht noch immer den Gesetzen der Prokuration. Auf Staubtafeln rechnen, heißt mit Abwesenheiten rechnen. Das Verfahren der Tilgung hat sie vom Abakus übernommen. Das Löschen der Stellen entspricht dem Reinigen des Rechenbretts. Werden dort fünf Einheiten erreicht, wird das Rechenbrett bereinigt. Bei der Bündelung werden die Steine durch einen einzigen Stein ersetzt. Auf dem Abakus besiegelt jeder Übertrag ein Todesurteil. Man mag an die Operation der Dezimierens denken. So wird auch bei al-Hwarizmi der Rechenweg nicht protokolliert. Jeder Rechenfehler kommt einem Todesurteil gleich. Denn weder die Staubtafel noch das Rechenbrett besitzen einen dauerhaften Speicher. Das gleiche lässt sich über al-Hwarizmis Beschreibung schreiben. Wenig kürzt das Rechenverfahren ab. Zugleich sind obere Stelle, untere Stelle, erste Stelle, zweite Stelle, linke Stelle nur relationale Adressierungen. Die Stellen aber müssen beim Lesen mitgezählt werden. Denn der Text nennt nur die Ausgangsstellung und das Ergebnis. Er speichert nicht den Rechenweg. Die Zwischenergebnisse sucht man vergebens. So steht selbst der Text noch vollständig im Zeichen der Durchkreuzung. Er bestraft jeden Fehler mit einem Loop.

Wie sieht die Multiplikation bei Fibonacci aus? Er umgeht die gekalkten Finger, indem er die Multiplikationen nicht mit zwei, sondern drei Zeilen anschreibt. Multiplikator, Multiplikand und Ergebnis erhalten getrennte Zeilen. Keine Stelle wird mehr gelöscht, dafür sorgt eine Kombination aus Fingerzahlen und schriftlichem Rechnen. Zwischenergebnisse werden nicht notiert, sondern gemerkt, die Überträge im Kopf errechnet. Da alle Stellen nur einmal vergeben werden, kann Fibonacci sie auch eindeutiger adressieren. Werden Zahlen zur Multiplikation aufgestellt, so stehen sie nicht mehr versetzt untereinander, sondern werden nach ihrem dezimalen Stellenwert sortiert aufgeschrieben [Fig. 39]. Da Fibonaccis Verfahren auch auf die Multiplikation großer Zahlen zielt, wird die Rechnung zuweilen sehr

1082152022374638
12345678
87654321

Fig. 39– Fibonacci, Liber Abaci, 1202 (G. M.).

unübersichtlich. Ein Beispiel, das schon seine Vorliebe für Zahlenreihen hervorhebt, maximiert das Kopfrechnen. Bei der Multiplikation von 12345678 mit 87654321 wird zwar keine Stelle getilgt.[423] Und dennoch wird die Finger- und Kopfrechnung bis an ihre Grenzen geführt. Die Multiplikation ist eine Ansammlung von 64 Einzelmultiplikationen. Zuweilen sammeln sich neun Posten einschließlich des Übertrags an, bis die Addition erfolgen kann, die die Stelle errechnet. Da Finger kein Zahlengedächtnis besitzen, kann auch Fibonacci am Ende die Rechnung nur durch die Neunerprobe überprüfen.[424] Denn der Rechenweg ist nicht protokolliert. Die eigentliche Rechnung wird auch bei Fibonacci auf der Staubtafel ausgeführt. Man solle ein geweißtes Brett benutzen, auf dem Ziffern leicht gelöscht werden können.[425] Auch Fibonacci, so scheint es gibt der Mobilität den Vorzug. Die Tafel ist geblieben. Aber die Staubtafeln von al-Hwarizmi und Fibonacci arbeiten nicht nur mit unterschiedlichen Tafelgrößen. Sie werden auch unterschiedlich benutzt. Beide Handschriften notieren die Tafel zumeist in der Form eines Rechtecks. Bei al-Hwarizmi ist die Tafel Teil des Textes, bei Fibonacci formalisieren Marginalien den Umgang mit Zahlen, die jede Aufgabe begleiten. Auf den Schreibflächen der Manuskripte werden sie auf zwei Dimensionen reduziert. Der Übertrag der Tafeln auf die Papieroberflächen erzeugt ein Instrument, die Tabelle, die fortan von den Kontoren als Steuereinheit Zeichentransporte und Zeichenproduktionen organisiert.

Wo al-Hwarizmi schreibt »scribe… deinde scribe … deinde scribes«, heißt es bei Fibonacci »describes questionem«: Lösungsvorschläge sind bei beiden immer schon Schreibbefehle. Doch hier enden die Gemeinsamkeiten auch schon. Die Staubtafel al-Hwarizmis hat eine Speicherkapazität von maximal 24 Zeichen (maximal $4 \cdot 6$ Zeilen). Sie ist reiner Datenspeicher. Sie fungiert als Zwischenspeicher und als Ausgabemedium für das Endergebnis. Die Staubtafel Fibonaccis hingegen erreicht mit Brüchen und Buchstaben nicht selten eine Auflösung von $27 \cdot 10$ Zeilen und mehr. Sie speichert nicht nur Daten. Auch das *Liber Abbaci* arbeitet bei der Multiplikation mit Tilgungen. Doch das geweißte Brett speichert nicht nur Daten. Es kennt noch einen weiteren Modus. Es speichert

III II I

[423] Fibonacci 1202[1857]: 7.
[424] Vgl. Fibonacci 1202[1857]: 8.
[425] *...tabula dealbata, in qua littere leviter deleantur.* Fibonacci 1202[1857]: 7.

auch Befehle. Die Staubtafel, die bei al-Hwarizmi als Arbeitsspeicher das Gedächtnis entlastet, wird im *Liber Abbaci* zur einer Art Diagram. Das geweißte Brett hält Zahlen nicht nur bereit für Überträge. Mit der Stellenwertlogik der Ziffer verbindet das *Liber Abbaci* ein ganzes Betriebssystem. Linien und Punkte heißen seine Elemente, die ebenso topographisch funktionieren wie die Ziffern. Eine waagerechte Linie bedeutet Division, eine diagonale Linie Multiplikation. Die Diagonale hat er wohl aus seinem Multiplikationsverfahren übernommen. Dort werden die überkreuz stehenden Zahlen miteinander multipliziert. Die euklidische Ordnung des rechten Winkels und der Gegenseite ist hier vollständig der Anschreibung des Rechenwegs gewichen. Ein Beispiel: Wenn 12 kaiserliche Goldmünzen 31 pisanische Dinare wert sind, wie viele Goldmünzen sind dann 11 Dinare wert? Die Schreibanweisung für diesen Dreisatz ist folgendermaßen:

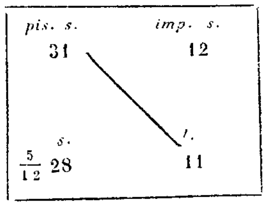


Fig. 40 – Aufgabe vom Geldwechsel, Liber Abbaci, 1202 (Boncampagni 1857).

> ...du schreibst die Aufgabe, nämlich zuerst den Verkauf, das sind 12 Goldstücke; dann auf derselben Linie gegenüber notierst Du den Preis, das sind 31 pisanische Dinar; und die 11 Dinar schreibst Du unter die 31, wie hier gezeigt wird: und nun multiplizierst Du die Ziffern, die gegenüber angeordnet sind, nämlich 11 mit 12, das sind 142; das Ergebnis dividiere durch 31, daraus ergeben sich 4 und 8/31 kaiserliche Goldstücke.[426]

Wie die bei der Aufstellung der Zahlen in den vier Grundrechenarten sortiert die Tabelle zunächst. Zeilen und Spalten scheiden nicht nur zwischen pisanischen und kaiserlichen Goldmünzen. Sie unterscheiden nicht nur zwischen Pferden und Menschen, Gerste und Tagen, Wein und Viehfutter. Jeder Aufgabentyp hat eine spezifische Notation. Dreisätze wie oben erhalten die gleiche Notation. So formatieren Diagramme die Aufgaben. Kaufleute, die mit verschiedenen Währungen, verschiedenen Legierungen, Pferderationen, Tuch und Weinvorräten Umgang haben, müssen nur den Anweisungen der neuen Tafeln folgen, damit Währung fehlerfrei übertragen werden, Beträge richtig berechnet werden. Das Operationszeichen der Multiplikation, die Linie, macht dies sichtbar. In der Fläche wird Mathematik zur Kartographie. Das Lösen von Aufgaben setzt nicht viel Wissen voraus. Wie auf den Portolankarten eine Linie den Kurs bestimmt, der Häfen verbindet, so erzeugen die Linien und Stellen der neuen Tabellen ihre

[426] Fibonacci 1202[1857]: 103.

eigenen Wegbeschreibungen. Tabellen mechanisieren den Umgang mit Zahlen. Sie speichern Routinen.

Obwohl beide Systeme auf den indischen Ziffern aufruhen, entfalten die Tafeln Fibonaccis eine Fläche, die wenig mit den Staubtafeln al-Hwarizmis gemein haben. Al-Hwarizmi optimiert über das Stellenwertsystem auf der Staubtafel die Mobilität der Ziffern. Auf der Staubtafel hat die Beweglichkeit Vorrang vor der Speicherbarkeit. Wie sehr Bagdad im 9. Jahrhundert an der Mobilität und Übertragbarkeit gelegen ist, bezeugt auch das Interesse an der Kryptographie. Al-Kindi, Hofphysiker des Kalifen von Bagdad, Direktor der Übersetzerschule, überträgt im 9. Jahrhundert die Beweglichkeit der Zahlen auf Buchstaben. Seine Kryptoanalyse überträgt das Stellenwertsystem auf Alphabete. Sein Lehrbuch zur Entzifferung verschlüsselter Texte, das *Risalah fi Istikhraj al Mu'amma*, rät Häufigkeitsanalysen anzuwenden. Sie weisen jeden Buchstaben eine Stelle zu:

> Wenn wir die Sprache des verschlüsselten Textes kennen, ist es möglich, eine verschlüsselte Botschaft zu entziffern, indem ein Text gleicher Länge gefunden wird, der mindestens eine Seite füllt. Dann zählen wir jeden Buchstaben dieser Seite,

schreibt al-Kindi und fährt fort,

> Wir nennen den am häufigsten auftretenden Buchstaben, den ersten, den zweithäufigsten, den zweiten, dem nächsten den dritten und so weiter ...[427]

Nachdem jeder Buchstabe durch seine Stelle adressiert worden ist, werden die Zeichen des Kryptogramms auf ihre Häufigkeit untersucht. Nun wird bilanziert. Das Verfahren erinnert an die *muqabalah* und *restauratio*, dem Kürzen gleicher Terme.[428] Die Zeichen, die denselben Häufigkeitswert auf der Klartextseite besitzen, überschreiben die Zeichen des Kryptogramms:

> Wir finden den häufigsten Buchstaben und ersetzen ihn durch den ersten Buchstaben des Klartextes, den zweithäufigsten und ersetzen ihn durch den zweiten Buchstaben des Klartextes ...

Dieses Verfahren, das Gleiches mit Gleichem tilgt, steht noch ganz im Zeichen der X, es werden lediglich anstelle der Körper Buchstaben duelliert. Die Ordnung der Durchkreuzung ist bei seinem Übertrag von Rom über Byzanz nach Bagdad zu einer Ordnung von Buchstaben und Zahlen geworden. Und wenn al-Kadi schreibt, dass die Araber mit Byzanz manchmal Friedensverträge gegen Manuskripte tauschen,[429] hat es fast den Anschein, als ersetzten sie die Mobilität ihrer Truppen durch die Mobilität von Zahlen und Buchstaben. Um die Techniken der

III II I

[427] Ibrahim al-Kadi 1998: 103.
[428] Vgl. Al-Hwarizmi/Robert of Chester *al jabr:* III 1.
Ibrahim al-Kadi 1998: 103.

Dezimierung ranken sich eine ganze Serie von persischen Erzählungen, die dem ungemerkten Übertrag gewidmet sind: Es sind die Erzählungen von Tausend und eine Nacht. Nur der Übertrag rettet Schehersad das Leben. Bei Tagesanbruch ereignet sich immer derselbe Dialog zwischen den beiden Schwestern Schehersad und Dinarsad:

> Dinarsad sprach zu ihr: »O wie schön und wundervoll ist deine Erzählung meine Schwester.« Schehersad erwiderte: »Was ist das im Vergleich zu dem, was ich euch in der folgenden Nacht erzählen werde, wenn mein Herr, der König mich leben lässt; es wird noch weit wunderbarer und angenehmer und entzückender sein.« Das Herz des Königs entbrannte vor Verlangen, die weitere Erzählung zu hören, und beschloss bei sich: Bei Gott ich lass' sie nicht umbringen, bis ich das Ende der Geschichte vernommen habe.[430]

Während Caligula das Reinigen des Rechenbretts mit der Dezimierung gleichsetzt, entkommt Schehersad durch den Übertrag dem Tod. Und dennoch ist der Übertrag auch hier ungemerkt. Erst nach Tausend und Einer Nacht, nach einer halben Ewigkeit und drei Söhnen, wagt Schehersad den König zu bitten, der Tilgung abzuschwören.

Schehersad ist die arabische Antwort auf Caligula. Ihre Erzählungen zeigen nicht nur, dass das Wohl des Reiches zuweilen an einem Übertrag hängt. Jene Erzählungen, die im 9. Jahrhundert schon auf Papier geschrieben worden und ihren Plot vollständig dem Übertrag verdanken, zeigen, dass die Tage der Durchkreuzung gezählt sind. Denn als die Europäer ihre eigene Mathematik aus Bagdad, Sevilla, Cordoba und Sizilien empfingen, setzen sie nicht mehr auf Staub und Wüstensand, sondern kombinieren die Mobilität der Buchstaben und Zahlen mit der Speichermacht des Papiers. Auf dem Papier erfinden die Ziffern den gemerkten Übertrag, der jede Erzählung Schehersads überflüssig macht, weil er Tausend und Eine durchwachte Nacht durch einen Federstrich ersetzt. Fibonacci optimiert die Speicherbarkeit. Ein Dreisatz wird immer mit demselben Diagramm angeschrieben. Ein Schema genügt, um Tausend und Eine Aufgabe desselben Typs fehlerfrei zu lösen.

Ein einfaches Brett kann Staub aufnehmen, oder mit einer Wachsschicht überzogen werden. Das Brett kann man unterschiedlich verwenden, doch Sand oder Wachs diktieren einen ganz unterschiedlichen Gebrauch. Im Staub werden die Ziffern geschrieben, um zu verschwinden. In Wachs werden sie geritzt, um zum dauerhaften Garanten des protokollierten Übertrags zu werden. Sei es nun

||| || |

[430] Für den stereotypen Übertrag hier stellvertretend Tausend und Eine Nacht: 24.

das Kapitel über das Verfahren der Subtraktion, der Multiplikation, der Division,[431] überall steckt bei al-Hwarizmi ein Poseidon im Verfahren. Hat man sich verrechnet, muss man neu beginnen. Al Hwarizmis Routinen erlauben keine Sprungbefehle. Jeder Halt wird mit Irrfahrten bezahlt, jeder Versuch eines Loops mit Stürmen und Orkanen, mit Nebel, Nacht und dem Neubeginn bestraft. Die Verfahren funktionieren nach dem Modell der Periploi linear. Auf den geweißten Tafeln hingegen erzeugt jeder Punkt seine eigene Operativität auf der Fläche. Ziffern, die untereinander stehen, werden dividiert, Ziffern, die eine Diagonale verbindet, multipliziert und Ziffern in einer Zeile bilden einen Datensatz. Aus den alten Tafeln, deren entscheidende Funktion das Löschen ist, entsteht im *Liber Abbaci* die Tabelle. Die Tabelle denkt mit der Lichtung die Bahnung. Zahlen werden nicht nur geschrieben, um zu verschwinden. Sie verbleiben dauerhaft im Speicher.

Der Aufenthalt in Bougia bleibt nicht folgenlos. Keine Innovation, nur ein Detail verschweigt die Autobiographie, die Fibonacci an den Anfang des *Liber Abbaci* setzt. In Bougia wechseln nicht nur kandierte Früchte, Felle und Sandalen den Besitzer. Dieser Ort wird so sehr von einer Ware geprägt, dass er ihr seinen Namen leiht. Es ist der Handel mit Wachskerzen.[432] Aus *Bidjaya*, dem Namen eines Berberstamms, wird spanisch *bujia*, die »Leuchte«, und später *la bougie*, die »Kerze«. Al-Hwarizmi verwendet vermutlich Staubtafeln. Darum kann er nur wenige Zeichen notieren. Für Fibonacci aber liegt der Gebrauch von Wachstafeln in Bougia viel näher als die Verwendung von Glasstaub, Kalk und Sand. Das erklärt, warum die Ziffern auf ihrem Weg von al-Hwarizmi zu Fibonacci sich verändern. Erst Wachstafeln ermöglichen die hohen Auflösungen, die Fibonaccis Diagramme fordern. Dass die Verwendung der Diagramme den entscheidenden Unterschied ausmachen, kann man aus seiner Einleitung schliessen:

> In Bezug auf die Methode der Inder enthält der Gebrauch der arabischen Zahlen (algorismus) ebenso viele Irrtümer wie der Umgang mit dem Abacus (arcus pitagorei). Ich habe deshalb die Methode der Inder genauer zusammengefasst, Eigenes ergänzt und manches von den Feinheiten der geometrischen Kunst des Euklid hinzugefügt.[433]

III II I

[431] Vgl. Karl Menninger 1978: II 260. Über das Wischverfahren auf Rechentafeln: A. P. Juschkewitsch 1964: 30-38.

[432] David Eugene Smith / Louis Charles Karpinski: The Hindu-Arabic Numerals. Boston / London 1911. S. 130.

[433] Fibonacci 1202/1857: 1.

Die Innovation, die Fibonacci hier beiläufig erklärt, besteht darin, eine Kulturtechnik der euklidischen Geometrie für die Arithmetik und Algebra nutzbar zu machen. Er verwendet das beschriftete Diagramm, das aus der griechischen Geometrie eine Kunst des Zeigens und Verweisens macht. Auf dem Diagramm beruht bei Euklid der Beweis. So wird es möglich, mit einer einzigen Zeichnung die Lösung eines geometrischen Problems in allen ihren Schritten festzuhalten und nachzuvollziehen. Ein zeitlicher Prozess, die Lösung einer Aufgabe, oder der Beweis eines Lehrsatzes wird durch eine einzige Zeichnung kodiert. Fibonacci überträgt die Praktiken des Beweisens auf die Arithmetik:

> Alles was ich eingeführt habe, habe ich mit einem Beweis versehen,

schreibt Fibonacci.[434] Er überträgt sie auf die Lösung von arithmetischen Aufgaben und auf die Lösung von Gleichungen. Erst in Wachs sind arithmetische Probleme vollständig mit ihren Lösungswegen anschreibbar. Kein Zeichen wird dabei getilgt. Rechenfehler auf den Staubtafeln können nicht korrigiert werden. Im Wachs Bougias hingegen ist jeder Rechenschritt protokolliert.

Bei Fibonacci, so scheint es, hat das Stellenwertsystem nicht nur einen neuen Typus von Zahlenvorrat geschaffen, sondern auch einen neuen Typus von Operationszeichen. Staubziffern übertragen die Ordnung des Abakus auf die Schreibfläche. Tilgen ist die vordringlichste Operation der Staubziffern. Ziffern in Wachs und auf dem Papier dagegen operieren Stellen mit festen Adressen. Während al-Hwarizmi relationale Adressen verwendet, kann Fibonacci jede Stelle über ihre Nachbarn genau adressieren, da jede Stelle dauerhaft vergeben wird. Darum nennt Fibonacci sie wohl auch nicht mehr *differentiae*, sondern *gradus*, »Schritt«, »Stufe« und »Rang«. Am Beispiel der X erklärt al-Hwarizmi die Bildung von Zahlen:

> Und die Darstellung einer Zahl geschieht so. Jede Eins bedeutet, wenn sie an der früheren Stelle steht, eins, an der späteren aber X, und was an der späteren Stelle X bedeutet, ist eins an der früheren.[435]

Fibonacci dagegen braucht nur zwei Sätze. Er schreibt:

> Die erste Zahl, das ist die Zahl der ersten Stelle, heisst eins.
> Die zweite, die sich auf der zweiten Stelle befindet, heisst zehn
> … .[436]

III II I

[434] Fibonacci 1202/1857: 1.
[435] Al-Hwarizmi 1.5.
[436] Fibonacci 1202/1857: 4.

Die Beschreibung fällt deshalb so kurz aus, weil jede tabellarische Aufstellung die Zahlen nach ihrer dezimalen Abfolge sortiert. Ziffern, die nicht mehr einer relationalen Unterscheidung [differentia], sondern einer Abfolge [gradus] folgen, operieren nicht mehr im Modus der Durchkreuzung [X]. Sie schreiben die Tilgung an und protokollieren den Übertrag. Die Diagramme Fibonaccis notieren den Rechenweg durch Zeilen, Spalten und Linien an. In den Schreib- und Leseanweisungen, die auf Abrichtung setzen, finden sich die Anfänge der Routinen.

Aber es bleibt ein Unterschied: Das sogenannte Wischverfahren wird zwar als Streichverfahren von den Staubtafeln auf die Papieroberfläche übertragen.[437] Und dennoch funktionieren Ziffern erst auf Papier vollständig in der Schrift. Im Wischverfahren bedeutet Übertragen Löschen. Die Ziffern werden der Lesbarkeit willen übereinander geschrieben. Der ungemerkte Übertrag, die Kopfrechnung und die Fingerzahlen, die Fibonacci gegen die Staubfinger einführt, markieren eine Grenze. Mit ihnen notiert er die Rechenwege. Doch erst im Streichverfahren bedeutet Übertragen speichern.[438] Auch wenn Cajori und Menninger darüber schweigen, wie das Streichverfahren seinen Weg auf die Schreibfläche findet, so liegt doch eine Vermutung nahe: Da die Multiplikation die Überträge maximiert und die Diagonale nicht nur bei Fibonacci das Zeichen für die Multiplikation ist, ist anzunehmen, dass jener Strich, der die Zahlen kanzelliert, auf direktem Wege von der Multiplikation auf die Zahlen übertragen worden ist. Zwar wird das Streichverfahren bei Fibonacci nirgendwo genannt, doch führt jedes Beispiel seines Lehrbuchs die Anschreibung der Posten vor. So ist es nur ein kleiner Schritt, mit der Diagonale an den Zahlen die erfolgte Multiplikation zu testieren. Doch das Streichverfahren verlangt nicht nur den verschwenderischen Umgang mit Schreibflächen. Aus *Bidjaya* wird im Italienischen *budgia*, der »Handleuchter« und die »Lüge«. Aus dem Namen eines Berberstamms wird das Verb *buggerare,* »beschummeln« und »reinlegen«. Das Streichverfahren kann seine Wirkung weder auf den Staubtafeln al-Hwarizmis, noch auf den Wachstafeln Fibonaccis entfalten. Es braucht eine Schreibfläche, die weder geglättet, abgeschabt, noch abgewaschen werden kann, und eine Oberfläche, die unbestechlich und genau ist und jede Tilgung als Bewegung speichert. Genau das leistet das Papier.

I I I I I I

[437] Über das Wischverfahren auf Rechentafeln: A. P. Juschkewitsch 1964: 30-38.
[438] Vgl. Karl Menninger 1978: II 140 f; 260.

Gerade weil Ziffern vollständig der Logik der *Stellen* (*mansio*, *differentia*) folgen, wandeln sie ihre Operabilität mit ihrem Aufenthaltsort. Das Wort *tabula*, so schreibt Georges, meint nicht nur *Schreib-* und *Rechentafel*, sondern auch *Register* und *Verzeichnis, Testament* und *Archiv, Wechselbank* und *Landkarte*.[439] Doch erst auf der Papieroberfläche durchlaufen Tafeln das gesamte Spektrum ihrer Bedeutungen. Erst auf dem Papier werden aus Landkarten und Archive, die die Zahlwege speichern und beglaubigen können. Nur Papier macht Tafeln zu Tabellen, die die Bewegungen von Zahlzeichen steuern. Zwei Federstriche führen vom Zahlentransport zum Zahlungsfluss. So bleibt am Ende nur noch zu zeigen, wie erst auf der Papierfläche protokolliert überschrieben werden kann.

Die doppelte Anschreibung von Posten

Die Ziffern, so Karpinski, jene neue Art Zahlen anzuschreiben, setze sich erst mit der Verbreitung des Papiers im Westen durch und das nicht vor 1500.[440] Erst, als Transport speichern heißt, ist das neue Notationssystem anschlußfähig an einen Handel, der so sehr auf Expansion setzt. Rechnungen auf Staubtafeln sind nicht sehr transportabel, Bilanzen auf Staubtafeln unmöglich. Erst der protokollierte Übertrag von Zahlen, macht die Ziffern kompatibel mit einem Handel, dessen größter Feind der Raum ist.

Speichermacht erzeugt erst der Verbund von Papier und Ziffern. Papier, Ziffern, Doppik oder der verschwenderische Umgang mit Schreibflächen markieren den historischen Ort des neuen Codes, der Wirtschaft quantifizieren sollte. Die Doppik, die doppelte Anschreibung von Posten, ist der Effekt eines kleinen Kreises, der nichts bedeutet und dennoch berechenbar ist. Im Hauptbuch bedarf jede Mobilie der Immobilie, jeder Vorgang der doppelten Schriftlichkeit.

> ...man darf nie etwas ins Soll setzen, das nicht auch ins Haben kommt, und ebenso darf man nie etwas ins Haben stellen, das mit demselben Betrage nicht auch ins Soll kommt,

| | | |

[439] Karl Ernst Georges 1998: II 3003.
[440] Karpinski / Smith: The Hindu-Arabic Numerals. Boston / London 1911. S. 136 f.

schreibt Pacioli.[441] Die Null ermöglicht mit dem Schuldner den Gläubiger, mit dem Soll das Haben, mit der Zahlung die Nichtzahlung.

> Wer zahlt, kann eben sein Geld nicht behalten, und wer es behält, kann nicht zahlen, so daß immer eine Mitorientierung am Gegenteil mitläuft,

schreibt Luhmann.[442] Speichern heißt doppelt anschreiben. Doppelt anschreiben heißt nicht ersetzen, sondern unterscheiden. Doch erst wenn unterscheiden, anordnen heisst, kann der *circulus parvus* seine Speichermacht entfalten.

Wie wird nun also übertragen? Wie werden die Posten vor jeder Dezimierung bewahrt? Keine Adresse wird zweimal vergeben. Auf … allen Büchern, schreibt Pacioli,

> ... muss man zuerst außen das Zeichen auf dem Einband anbringen, damit du beim Fortschritt der Geschäfte, wenn sie voll geschrieben sind oder eine gewisse Zeit abgelaufen ist und Du deshalb ein anderes Buch nehmen willst, oder die Notwendigkeit Dich zwingt, wenn es voll ist, sie unterscheiden kannst.

Signaturen auf den Rücken der Geschäftsbücher ketten das entsprechende Tripel Memorial / Journal / Hauptbuch — die Basis jeder Doppelten Buchhaltung aneinander. Die Rücken der Bücher folgen der alphabetischen Ordnung, die Abfolge ihrer Blätter folgt der numerischen Ordnung. Das Hauptbuch schließt mit einem alphabetischen Register, der die Namen aller Debitoren und Kreditoren enthält. Werden Posten vom Journal ins Hauptbuch übertragen, verweist eine 2-stellige Seitensignatur im Journal auf die entsprechende Adresse des Hauptbuchs.

> Du mußt an der Seite am Rande vor dem Anfang zwei Zahlen anbringen, die eine unter der anderen, wovon die obere angibt, auf welchem Blatte des Hauptbuches der Posten des Schuldner gebucht ist, und die untere das Blatt im Hauptbuch angibt, wo ich der Gläubiger befindet,

weist Pacioli den Buchhalter an.[443] Dies ermöglicht nicht nur die Buchprüfung. Jede Buchung kann genauestes adressiert werden. Jede Kasse findet ihr Kapital, jedes Soll sein Haben. Die Einträge des Hauptbuches verweisen mit Seitenzahl aufeinander. Sie setzen Zeiger von der linken auf die rechte Seite, von der rechten Seite auf die linke Seite der Tabelle. So lautet ein Eintrag auf der linken Seite:

> Jesus MCCCCLXXXXIII [1493]
> Kasse Soll am 8. November per Kapital: Für Bargeld, das ich in verschiedenen Sorten, in Gold und Münzen, am heutigen Tage besitze, Bl.2 ....L. 10 000, s.0, g.0

und in der linken Spalte auf Blatt 2 findet sich der Eintrag:

> Jesus MCCCCLXXXXIII [1493]

||| || |

[441] Luca Pacioli 1997: 109 (Kap. 14. Von der Art, wie man das Journal in das Hauptbuch überträgt).
[442] Niklas Luhmann 1996: 53.
[443] Pacioli Kap. 14 (Von der Art, wie man die Posten des Journals in das Hauptbuch überträgt.) 109

Kapital von mir, Haben am 8. November per Kasse: Für Bargeld, das ich bis zum heutigen Tage in Gold und Münzen verschiedener Art im ganzen besitze,
Bl 1 .... L. 10 000, s.0, g.0

Überschreiben in der Doppik heißt nicht mehr Löschen sondern Buchen, und Buchen doppelt Anschreiben und Adressieren.

Ein doppelter Federstrich

Für den Vorgang des Buchens sieht Pacioli ein besonderes Verfahren vor, das die Doppelte Buchführung noch einmal enger an die Navigation bindet. Wird ein Betrag vom Journal ins Hauptbuch übertragen, wird er im Journal nicht mehr gelöscht. Er wird protokolliert überschrieben. Der Übertrag wird durch Durchstreichungen verzeichnet, unter denen die Routen der Zahlen weiterhin lesbar bleiben.

> Wie Du von einem Posten des Journals zwei in dem Hauptbuche bildest, so wirst Du bei jenem Posten, den Du vom Journal überträgst, zwei Querlinien ziehen, je nachdem Du ihn ausziehst, nämlich, wenn Du ihn zuerst ins Soll überträgst, so wirst Du zuerst eine Querlinie gegen den Anfang des Postens ziehen, die andeutet, dass er im Soll des Hauptbuches eingetragen worden ist. Wenn Du ihn ins Haben stellst,... wirst Du den anderen Strich gegen rechts in die Ecke ziehen.

schreibt Pacioli.[444] Ist der Posten des Journals zweimal übertragen, findet er sich also im Soll und Haben des Hauptbuches, so vermerken zwei Linien, die sich kreuzen, den Übertrag.

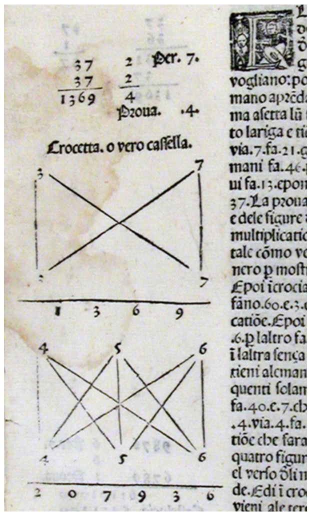


Fig. 41 – Luca Pacioli, Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità, Venedig 1494 (MPIWG, ECHO).

Woher aber nimmt Pacioli die Durchkreuzung? In die Arithmetik findet das Kreuz auf vielen Wegen Eingang. Bei Fibonacci steht es für die *additio ex erroribus*.[445] Bei Chuquet, Widman und Pacioli bezeichnen sie auch zwei Brüche, die in Proportion zueinander stehen. Rudolph und Tartaglia hingegen greifen auf das Kreuz zurück, um die Neunerprobe zu vollführen.[446] Erst Pacioli verwendet

III II I

[444] Luca Pacioli 1997: 108.
[445] Vgl. Fibonacci 1202/1857: 319.
[446] Florian Cajori 1923: §§ 221, 225.

das Kreuz 1494 im heutigen Sinn für die Multiplikation von ganzen Zahlen (Fig. 37).[447] Wie bei Fibonacci bezeichnet es den Rechenweg, indem es die Multiplikation von mehrstelligen Zahlen in Einzelmultiplikationen aufteilt. Das Kreuz sorgt dafür, dass alle Einzelmultiplikationen getätigt werden. Sie sorgt dafür, dass keine Stelle vergessen wird, dass jede Stelle des Multiplikators auf jede Stelle des Multiplikanden seine Anwendung findet. Von der Multiplikation überträgt Pacioli das Kreuz auf die Buchhaltung. Hier garantiert es, dass jeder Posten zweimal gebucht wird – als Soll und als Haben. So wird das Kreuz zum glaubhaften Garanten des getätigten Übertrags.

Warum soll gerade die Durchkreuzung den Übertrag der Posten zu beglaubigen? Nicht in der 0, sondern erst in der Durchkreuzung wird sichtbar, dass die Tilgung zum Zeichen geworden ist. Denn die Null bezeichnet nur die Leere. Sie folgt einer Logik der Ersetzung. X steht hingegen nicht für Leere, sondern für eine Operation: die Tilgung. So wahrt erst die Durchkreuzung die Einheit des Übertrags. Sie sorgt dafür, dass jeder Posten nur einmal übertragen wird. Die Dezimierung bringt nun nicht mehr den Tod. Denn ihre Spuren verbleiben im Speicher. Die Durchkreuzung universalisiert den Zeichenvorschub. Nicht nur Zahlenbewegungen, jede Operation kann zur Routine werden.

Buchen meint nun nicht mehr Löschen, sondern Abrichten und Navigieren. Auch auf der Papieroberfläche bedeutet Navigieren Steuern und Kreuzen. An die Stelle des Meeres tritt das endlose Weiß der Papieroberfläche. Der reisende Kaufmann wird durch den Agenten ersetzt, der durch einen beständigen Strom von Briefen, Verträgen und Büchern die Einheit des Übertrags garantiert. Kein Posten darf ihm verloren gehen. Jede Bereinigung der Rechnung muss protokolliert werden. Darum kreuzt die Feder des Buchhalters unermüdlich über Zahl und Buchstabe, als fahre sie rastlos über das offene Meer: von West nach Ost, von Nord nach Süd, von links nach rechts, von oben nach unten. Denn alle Zeichen, die bewegt werden, müssen mit zwei Linien kanzelliert werden.[448] Doch die Buchung kann nur glücken, wenn mit der Mobilität auch die Adressierung verbunden ist. Das Format der Bücher, das Format der Blätter, weist jedem Eintrag

[447] Florian Cajori 1923: § 226.
[448] Über den paradoxen Akt der Kanzellierung in den Akten vgl. Cornelia Vismann 2000: 44-47 und 88 f.

nicht nur die Daten eines jeweiligen Postens zu, sondern auch seine Adresse. Gerade weil die Bücher als geschlossenes System operieren, erzeugen Daten ihr eigenes Buch der Straßen und Provinzen. Dieselbe Technik, die den Transport über Spalten-, Seiten- und Büchergrenzen hinweg organisiert, ermöglicht auch den Transport über Länder- und Küstengrenzen hinweg.

> Die Reisen pflegt man in zweierlei Weise auszuführen, nämlich für sich selbst oder im Auftrag für andere. Daher entstehen verschiedene Arten, ihre Konten zu führen, weil sie immer doppelte Bücher voraussetzen, sei es, dass... Du selbst reist oder Du reisen läßt, denn ein Hauptbuch bleibt zu Hause und das andere ist auf Reise,

schreibt Pacioli.[449] Der Verbund von Papier, Ziffern, Doppik, überwindet den Raum. Darum können anstelle von Menschen Bücher reisen. In gewisser Hinsicht bedeutet Handel noch immer Transport. Doch Transport ist nicht mehr eine Funktion des Mittelmeeres, sondern zu einer Funktion von Zeilen und Spalten geworden. Operationalisierte Zeilenvorschübe ersetzen nunmehr Verkehrsflüsse. Wege gibt es fortan zweimal: im Raum und in der Fläche, als Routen und Routinen.

Es sei bemerkenswert, schreibt Lane, daß die »Kunst der Hafenfindung« zur gleichen Zeit und am selben Ort entwickelt werde wie die doppelte Buchführung. Dieser Ort hat eine Adresse

> Von Scalea nach NW 1/3 W landeinwärts liegt ein Fluss, der bis zur Festung Liburnias reicht, von der in Richtung N nach 115 Meilen der Hafen des Stadtstaats Pisa liegt.
>
> [...]
>
> Der eigentliche pisanische Hafen liegt vom Stadtstaat Pisa knapp 15 Meilen entfernt.[450]

Im ersten Hafenbuch des Mittelmeeres, dem *Liber de Existencia riveriariarum et forma maris nostri mediterranei*, wird Pisa mit 2 Sätzen adressiert. Die Adresse ist relational. Sie ist wie die Buchführung ein Effekt des Stellenwertsystems. Denn wo al-Hwarizmi linke Stelle rechte Stelle, obere Stelle, untere Stelle schreibt, gibt das Hafenbuch eine Kombination von Nord, Ost, Süd oder West an. Das Hafenbuch ist ein Algorismus der Schiffswege. Und das kommt nicht von ungefähr. Denn das erste Hafenbuch ist nicht nur von einem Autor verfasst, der um 1200 in Pisa am Ort des Übertrags gelebt hat. Es ist auch zur gleichen Zeit wie das *Liber Abbaci* entstanden. Man nimmt an, dass der namenlose Autor Fibonacci gekannt, das *Liber*

[449] Pacioli 1997: 134.
[450] Liber de existencia riveriarum: 1642-44, 1758.

Abbaci geschätzt haben muss.[451] Seine Daten hat er nicht nur aus den heiligen Schriften. Er ist selbst auf den Straßen Khordadbehs gereist. Er hat Bougie gesehen: die Stadt des Wachses. Und er spricht arabisch. Dieser heimliche Doppelgänger Fibonaccis folgt ihm wie ein Sekretär. Sein Hafenbuch legt nahe, dass die »Kunst der Hafenfindung« aus dem Missbrauch euklidischer Diagramme,[452] aus der Buchführung der Kaufleute entstanden ist. Das Hafenbuch des namenlosen Autors enthält alle Routen des Mittelmeeres und der angrenzenden Flüsse. Es schreibt alle Orte doppelt an: als Entfernung und als Stellenwert. Keine Seekarten sind aus dieser Zeit erhalten geblieben. Dalché schließt dennoch, dass dem Buch eine Karte zugrunde lag. Denn die Windrichtungen sind erstaunlich genau.[453]

Die Prototypen der Hafenkarten, die um 1200 in Umlauf waren, reduzieren das Meer auf eine euklidische Fläche. Bevor Pisa seinen Handel vollständig vom Transport auf den protokollierten Übertrag umstellt, bevor das tabellarische Format der venezianischen Buchhaltung Häfen in Spalten und Schiffsladungen im protokollierten Zeilenvorschub verschwinden lässt, üben Hafenbücher und Karten den Umgang mit Schreibflächen ein. Die Doppik ermöglicht eine Kunst der Hafenfindung, die Schiffe durch Federstriche auf dem Papier dirigiert. 1204, vor Konstantinopel, scheint Navigation nur unter Einsatz von Menschenleben möglich. Und dennoch beginnen zur gleichen Zeit Zahlen und Linien den Transport von Waren zu regeln. Pisa, nicht der Erfinder der doppelten Buchführung, aber der Ort, an dem die Operationalisierung der Schreibfläche beginnt, lebt fortan so sehr vom protokollierten Übertrag, dass es ganz im Modus des *circulus parvus* operiert. Im Hafenbuch ist seine Position relational angeben. Auf der Karte markiert ein Punkt den Ort der Stadt. Pisa ist kein Ort: Es ist eine Null. Und auf dem Papier ist das mehr als Nichts. Die Zahlen werden von Stein, Holz und Bronze auf Wachs, Torffaser und Papier übertragen. Dort löscht niemand mehr ohne zu schreiben, schreibt und schreibt nicht. Und selbst das, was nicht geschrieben ist, hat eine Adresse im System. Das Büro ist ein Gewächs, das schon alle Zeichen der Verwesung an sich trägt. Es hat die Tendenz zu

III II I

[451] Patrick Gautier Dalché 1995: 15.
[452] E. G. R. Taylor1971: 103, 111.
[453] Patrick Gautier Dalché 1995: 29.

verschwinden. Es ist und ist nicht, weil es seine Codierungsmacht zwei Federstrichen verdankt: den Praktiken und Techniken des Löschens –

X.

DANKSAGUNG

Ohne zwei Institutionen außerhalb der Fläche wäre dieses Buch nicht geschrieben worden. Mein Dank gilt dem Graduiertenkolleg Codierung von Gewalt im medialen Wandel und der Forschergruppe »Bild—Schrift—Zahl« an der Humboldt-Universität zu Berlin. Besonders danke ich der Fritz-Thyssen-Stiftung, weil sie mir ermöglicht hat, hinter der Tafel einen Gegenstand zu entdecken, den jeder benutzt, aber niemand mit eigenen Augen gesehen hat. Es ist die ebene Fläche. »Man sagt(…), dass wir sie… wahrnehmen, wenn wir den Schatten sehen. Denn dieser hat keine Tiefe, da er nicht unter die Erde dringen kann«, schreibt Proklos. Die Fläche ist ein Schatten – ein Ort ohne Tiefe, eine Nacht ohne Sterne. Mein größter Dank gilt deshalb 21 Menschen, mit denen mich mehr als zwei Sätze verbinden: Elisabeth Bronfen, Wolfgang Coy, Peter Geimer, Daniel Gethmann, Stefan Heidenreich, Markus Krajewski, Thomas Macho, Wolfgang Schäffner, Bernhard Siegert, Wladimir Velminski, Cornelia Vismann, Joseph Vogl, Friedrich Kittler, Horst Wenzel, meinen sechs Geschwistern und einem Unbekannten.

LITERATURVERZEICHNIS

Abbott, Edwin Abbott (2006): Flatland. A Romance of Many Dimensions, New York

Airy, G. B. (1835): On the Laws of the Tides on the Coasts of Ireland, as Inferred from an Extensive Series of Observations Made in Connection with the Ordnance Survey of Ireland, Philosophical Transactions of the Royal Society of London (Band 135).

Al-Hwarizmi, Abu 'Abdallah Muhammad bin Musa (1989): Al Jabr: Liber algebre et almuchabolae de questionibus arithmeticis et geometricis, Wiesbaden.

Al-Hwarizmi, Abu 'Abdallah Muhammad bin Musa (1997): Dixit Algorizmi: Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach al-Hwarizmi, München.

al-Kadi, Ibrahim A. (1998): Origins of Cryptology: The Arab Contribution, Cipher A. Deavours, David Kahn u. a., Selections from Cryptologia. History, People, and Technology, London.

Alberti, Leon Battista (2000): Elementa Picturae. Grundlagen der Malerei, Schäublin, Oskar Bätschmann u. Christoph, Das Standbild. Die Malkunst. Grundlagen der Malerei, Darmstadt

Anonymous (1942): Girls Computer Has Made Speciality of Light Curves, Science News Letter (Band 42), Nr. 16, Seite 245-246.

Anonymous (1995): Liber de existencia riveriarum et forma maris nostri mediterranei, Paris.

Anonymous (1995): Rhetorica ad Herennium, München.

Anonymous (2004): Tausend und Eine Nacht, München.

Apokin, I. A. (2001): The first Calculating Devices in Russia, u.a., Wolfgang Ernst, Computing in Russia Seite 22–25, Braunschweig.

Archimedes (1824): Vorhandene Werke, Nizze, Ernst, Stralsund.

Archimedes (1970–1972): Oeuvres, Mugler, Charles, Paris.

Aristoteles (1966): De la génération et de la corruption. , Paris.

Arnold, Dieter (1991): Building in Egypt, New York

Babbage, Charles (1833): Über Fabrik- und Maschinenwesen, Berlin

Babicz, Josef u. Marcel Watelet (1994): Gérard Mercator cosmographe: le temps et l'espace, Anvers

Bardini, Thierry (2000): Bootstrapping. Douglas Engelbart, Coevolution, and the Origins of Personal Computing, Stanford

Baumgartner, Emmanuèle u. Philippe Ménard (1996): Dictionnaire étymologique et historique de la langue française, Paris.

Becker, Oskar (1936): Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im Neunten Buch der Euklidischen Elemente, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. (Band 3) Seite 533–553.

Becker, Oskar (1954): Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, München

Benseler, Gustav Eduard: (1994): Griechisch-deutsches Schulwörterbuch, 15., unveränderte Aufl. Auflage, Stuttgart

Bergmann, Werner (1985): Innovationen im Quadrivium des 10. und 11. Jahrhunderts. Studien zur Einführung von Astrolab und Abakus im Lateinischen Mittelalter, Stuttgart.
Birkhan, Helmut (1997): Kelten. Versuch einer Gesamtdarstellung ihrer Kultur, Wien.
Blaeu, Joan (2005): Atlas Maior Benedikt Taschen, Köln.
Bloom, Jonathan M. (2001): Paper before Print. The History and Impact of Paper in the Islamic World, New Haven, London
Boeckh, August (1819): Philolaos des Pythagoreers Lehren nebst den Bruchstücken seines Werkes, Berlin.
Braudel, Fernand (1998): Das Mittelmeer und die mediterrane Welt in der Epoche Philipps II, Frankfurt/M. .
Bretschneider, Carl Anton (1870): Geometrie und die Geometer vor Euklides. Ein historischer Versuch, Leipzig
Bullynck, Maarten (2006): Apeiron. Archimedes und die Grenzwerte des griechischen Alphabets, Ernst, Wolfgang u.a. , Die Geburt des Vokalalphabets aus dem Geist der Poesie: Schrift, Zahl und Ton im Medienverbund Seite 171–198, München
Burkert, Walter (1959): □□□□□□□□□□. Eine semasologische Studie, Philologus (Band 103), Seite 167-197.
Burkert, Walter (1962): Weisheit und Wissenschaft. Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon, Nürnberg
Burkert, Walter (2003): Die Griechen und der Orient. Von Homer bis zu den Magiern, München.
Byrne, Oliver (2010): The First Six Books of the Elements of Euclid, London 1847. Facsimile-Ausgabe Köln.
Cajori, Florian (1993): A History of Mathematical Notations, New York.
Calinger, Ronald (1999): A Contextual History of Mathematics, New York.
Cantor, Moritz (1900-1908): Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik.
Capella, Martianus (1983): De nuptiis Philologiae et Mercurii, Leipzig.
Capella, Martianus (1999): Die Hochzeit der Philologie und des Merkur, diplomatischer Textabdruck, Konkordanzen und Wortlisten nach dem Codex Sangallensis 872, Hildesheim.
Cassiodor (1961): Cassiodori Senatoris Institutiones, Oxford.
Caveing, Maurice (1997): La figure et le Nombre. Recherches sur les premières mathématiques des Grecs, Villeneuve-d'Ascq
Caveing, Maurice (1998): L'Irrationalité. Dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide, Villeneuve-d'Ascq
Chantraine, Pierre (1933): La formation des noms en grec ancien, Paris.
Chasles, Michel (1843): Histoire de l'arithmetique. Règles de l'Abacus (traduction littérale, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Band 16), Seite 218-246.
Chios, Hippokrates v. (107): Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und Hippokrates, Leipzig.
Cicero, Marcus Tullius (1985): Sämtliche Reden, Zürich, München
Cicero, Marcus Tullius (1990): Brutus, München, Zürich

Cicero, Marcus Tullius (1991): Gespräche in Tusculum: Tusculanae Disputationes, 6., durchgesehene Auflage. Auflage, München.

Cicero, Marcus Tullius (1993): Cato Maior de senectute: Cato der ältere über das Alter, München.

Cohen, Edward E. (1992): Athenian Economy and Society. A Banking Perspective, Princeton

Cotrugli, Benedetto (1906): Della mercatura et del Mercante perfetto, Kheil, Carl Peter, Benedetto Cotrugli Raugeo, ein Beitrag zur Geschichte der Buchhaltung, Wien.

Coulton, J. James (1977): Ancient Greek Architects at Work, Problems of Structure and Design, New York.

Couprie, Dirk (2003): The Discovery of Space: Anaximander's Astro¬nomy, u.a., Ders., Anaximander in Context. New Studies in the Origins of Greek Philosophy Seite 167–254, New York.

Cuberes, Maria Teresa, Reto R. Schlittler u. James K. Gimzewski (1996): Room-Temperature Repositioning of Individual C60 Molecules at Cu steps: Operation of a Molecular Counting De¬ice, Applied Physics Letters (Band 69), Nr. 20, Seite 3016–1018.

Cuomo, Serafina (2001): Ancient Mathematics, New York.

D'Ocagne, Maurice (1921): Traité de Nomographie. Étude générale de la re¬présentation graphique cotée des équations a un nombre quelconque de variables applications pratiques, Paris.

D'Ocagne, Maurice (1968): Le Calcul Simplifié. Graphical and Mechanical Methods for Simplifying Calcultation (Band 11), Charles Babbage Institute Reprint Series for the History of Computing, London.

Damerow, Peter (1981): Die Entstehung des arithmetischen Denkens. Zur Rolle der Rechenmittel in der ägyptischen und der altbabylonichen Arithmetik, Lefèvre, ders. u. Wolfgang, Rechenstein, Experiment, Sprache. Historische Fallstudien zur Entstehung der exakten Wissenschaften, Seite 11-113.

Damerow, Peter (2001): Kannten die Babylonier den Satz des Pythagoras? Epistemologische Anmerkungen zur Natur der babylonischen Mathematik, ders., Jens Høyrup Changing Views on Ancient Near Eastern Mathematics. Berliner Beiträge zum Vorderen Orient (Band 19) Seite 219-310, Berlin.

Damerow, Peter u. Robert K. Englund (1987): Die Zahlzeichensysteme der Archaischen Texte aus Uruk, Hans J. Nissen, M. W. Green, Zeichenliste der archaischen Texte aus Uruk Seite 117-166.

Dantzig, Tobias (1947): Number. The Language of Science. A critical Survey Written for the Cultured Non-Mathematician, 3., verbesserte Auflage. Auflage, London.

Darwin, Charles (2007): Die Fahrt der Beagle. Tagebuch mit Erforschungen der Naturgeschichte und Geologie der Länder, die auf der Fahrt von HMS Beagle unter dem Kommando von Kapitän Fritz Roy, RN, besucht wurden, 3. Auflage, Hamburg.

Dasypodius, Petrus (1974): Dictionarium latinogermanicum, Straßburg. Facsimile Hildesheim, New York

Davies, Philip J. u. Reuben Hersh (1981): The Mathematical Experience, Basel, et al.

Degenhart, Bernhard, Annegrit Schmitt (1973): Marino Sanudo und Paolino Veneto: zwei Literaten des 14. Jahrhundert in ihrer Wirkung auf Buchillustration und Kartographie in Venedig, Avignon und Neapel, Römisches Jahrbuch für Kunstgeschichte (Band 14), Seite 1-139.

Diadochus, Proklus (1945): Kommentar zum ersten Buch von Euklids »Elementen«, Halle.

Diadochus, Proklus (1992): Proclus: A Commentary on the First Book of Euclid's Elements.

Diels, Hermann (1899): Elementum. Eine Vorarbeit zum griechischen und lateinischen Thesaurus, Leipzig.

Duncan, David Ewing (1999): Der Kalender. Auf der Suche nach der richtigen Zeit, München.

Eissfeldt, Otto (1950): Ein Beleg für die Buchstabenfolge unseres Alphabets aus dem 14. Jahrhundert v. Chr., Forschungen und Fortschritte. Nachrichtenblatt der Deutschen Wissenschaft und Technik (Band 26), Seite 217-220.

Euklid (1694): Teutsch-Redender Euclides Oder: Acht Bücher von Denen Anfängen der Meß-Kunst, Wien.

Euklid (1916): The Elements of Euclid, 16. Auflage, London.

Euklid (1956): Thirteen Books of Euclid's Elements, , New York u. a.

Euklid (1997): Elemente, Frankfurt.

Eutocius (1972): Commentaires d'Eutocius et fragments, , Mugler, Charles, Archimède (Band 4), Paris.

Fibonacci, Leonardo (1857): Liber Abbaci (Band 1), Boncompagni, Baldassarre, Scritti di Fibonacci: Matematico del secolo decimoterzo, Rom.

Fibonacci, Leonardo (2002): Fibonacci's Liber Abaci – a translation into modern English of Fibonacci's book of calculation, New York.

Fowler, David (1999): The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction, Oxford.

Frazer, James George (2004): Der goldene Zweig. Das Geheimnis von Glauben und Sitten der Völker, Hamburg.

Friberg, Jöran (1981): Methods and Traditions of Babylonian Mathematics: Plimpton 322, Pythagorean Triples, and the Babylonian Triangle Parameter Equations, Historia Mathematica (Band 8), Nr. 3, Seite 277-318.

Friedewald, Michael (1999): Der Computer als Werkzeug und Medium. Die geistigen und technischen Wurzeln des Personal Computers, Berlin.

Frisk, Hjalmar (1960): Griechisches etymologisches Wörterbuch, Heidelberg

Fritz, Kurt von (1955): Die □□□□□ in der griechischen Mathematik, Archiv für Begriffsgeschichte (Band 1), Seite 13-103.

Fritz, Kurt von (1966): Philosophie und sprachlicher Ausdruck bei Demokrit, Plato und Aristoteles, Darmstadt

Furtwängler, Andreas, Hermann Kienast (1989): Der Nordabau im Heraion von Samos, Bonn.

Gamillscheg, Ernst (1969): Etymologisches Wörterbuch der fran¬zösischen Sprache, Heidelberg.

Gemoll, Wilhelm (1979): Griechisch-deutsches Schul- und Handwörterbuch, 9. Auflage, München.

Georges, Karl Ernst (1998): Ausführliches Lateinisch-Deutsches Handwörterbuch, Darmstadt.
Gerasa, Nicomachus von (1926): Introductions to Arithmetic, New York.
Giannisi, Phoebe u. Alexander Tzonis (2004): Klassische griechische Architektur: Die Konstruktion der Moderne, München
Giebel, Michael (2004): Reisen in der Antike, Darmstadt.
Gow, James (1923/1968): A Short History of Greek Mathematics, New York.
Grattan-Guinness, Ivor (1990): Work for the Hairdressers: The Production of de Prony's Logarithmic and Trigonometric Tables, Annals of the History of Computing (Band 12), Nr. 3, Seite 177-185.
Grebe, Sabine (1999): Martianus Capella. 'De nuptiis Philologiae et Mercurii'. Darstellung der Sieben Freien Künste und ihrer Beziehungen zueinander, Stuttgart, Leipzig
Green, M. W. (1987): The Sign List, Nissen, ders. u. Hans J., Archaische Texte aus Uruk Seite 169-350.
Grimm, Jacob u. Grimm, Wilhelm (1852 ff): Deutsches Wörterbuch, Leipzig. URL: http://www.dwb.uni-trier.de/
Guarducci, Margerhita (1967): Epigrafia Greca (Band I (Caratteri e storia della disciplina. La scrittura greca dalle origini all'età imperiale)), Rom.
Hagen, Wolfgang (2002): Bill Luhan and Marshall McGates. Die Extension des Menschen als Extension der USA, Stiegler, Alexander Roesler u. Bernd, Microsoft. Medien–Macht–Monopol Seite 24-47, Frankfurt/M. .
Halicarnassos, Dionysios von (1910): On Literary Composition (De compositione verborum), London.
Hankins, Thomas I. (1999): Blood, Dirt, and Nomograms. A Particular History of Graphs, Isis (Band 90), Seite 50-80.
Haselberger, Lothar (1983): Bauzeichnungen des Apollotempels von Didyma, Architectura (Band 13), Nr. 1, Seite 13-26.
Headrick, Daniel R. (1981): The Tools of Empire. Technology and European Imperialism in the Nineteenth Century, Oxford.
Heath, Sir Thomas (1981): A History of Greek Mathematics.
Hegi, Gustav (1967-1980): Illustrierte Flora von Mitteleuropa, Berlin, Hamburg
Hellner, Nils (2009): Die Säulenbasen des zweiten Dipteros von Samos. Grundlage für die Rekonstruktion des Tempels in seinen Bauphasen (Band 26.), Samos, Bonn.
Herodot (1988): Historien, Mün¬chen, Zürich
Heymann, Sabine (1995): Meisterwerke der Antike aus dem Archäologischen Museum Neapel (Ausst.-Kat.), Köln.
Homer (2000): Odyssee.
Høyrup, Jens (1994): In Measure, Number, and Weigth. Studies in Mathematics and Culture.
Høyrup, Jens (2002): Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Science, Ber¬lin/New York.

Hultsch, Friedrich (1893): Lemma »Abacus«, Wissowa, Georg, Paulys Realencyclopädie der Classischen Altertumswissenschaft (Band 1.) Seite 5-10.
Humboldt, Alexander v. (2008): Kosmos. Entwurf einer physischen Weltbeschreibung, Darmstadt.
Hyman, Anthony (1987): Charles Babbage, 1791–1871, Philosoph, Mathematiker, Computerpionier.
Iamblichus (2002): De vita Pythagorica, Darmstadt.
Ifrah, Georges (1991): Universalgeschichte der Zahlen, Frankfurt, New York
Immerwahr, Henry R. (1986): Aegina, Aphaia-Tempel, an Archaic Abacus from the Sanctuary of Aphaia, Archäologischer Anzeiger, Seite 195–214.
Jeffery, Lilian H. (1990): The Local Scripts of Archaic Greece. A Study of the Origin of the Greek Alphabet and its Development from the Eighth to the Fifth Centuries b.c., , 2., verbesserte. Auflage, Oxford.
Jones, Philipp (1997): The Italian City-State. From Commune to Signoria.
Juschkewitsch, Adolf P. (1994): Über ein Werk des Abu'Abdallah Muhammad ibn Musa al-Huwarizmi al Magusi zur Arith¬metik der Inder, Beiheft zur Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin zum 60. Geburtstag v. Gerhard Harigs, Seite 21-63.
Kaplan, Robert (1999): Die Geschichte der Null, Frankfurt, New York
Karpinski, Louis Charles u. David Eugene Smith (1911): The Hindu-Arabic Numerals, Boston, London.
Kay, Alan (1977): Microelectronics and the Personal Computer, Scientific American (Band 237), Seite 231-244.
Kay, Alan (1984): Computer Software (Band 251), Nr. 3, Seite 52-59.
Khordâdbeh, Abu'l Kâsim Obaidallah ibn Abdallah ibn (1889): Kitâb al-Masâlik wa'l-Mamâlik: Das Buch der Straßen und Provinzen, Bibliotheca Geographorum.
Kienast, Hermann (1985): Der sog. Tempel D im Heraion von Samos, Mitteilungen des Deutschen Archäologischen Instituts, Mitteilungen des Deutschen Archäologischen Instituts (Band 100), Seite 105-127.
Kirk, Geoffrey u.a. (1994): Die vorsokratischen Philosophen. Einführung, Texte und Kommentare, Stuttgart, Weimar
Kittler, Friedrich (1987): Aufschreibesysteme 1800/1900, München.
Kittler, Friedrich (1998): Daten—Zahlen—Codes. Vortrag an der Hochschule für Grafik und Buchkunst, Leipzig.
Klein, Jacob (1934): Die Griechische Logistik und die Entstehung der Algebra, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie, Abt. B: Studien (Band 3), Nr. 1, Seite 18-105.
Klein, Jacob (1936): Die Griechische Logistik und die Entstehung der Algebra, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie, Abt. B: Studien (Band 3), Nr. 2, Seite 123-235.
Knorr, Wilbur Richard (1975): The Evolution of the Euclidean Elemenets. A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry, Dordrecht, Boston
Knorr, Wilbur Richard (1986): The Ancient Tradition of Geometric Problems, Boston, Basel, Stuttgart

Krajewski, Markus (2002): Zettelwirtschaft. Die Geburt der Kartei aus dem Geiste der Bibliothek, Berlin.
Krämer, Sybille (1988): Symbolische Maschinen. Die Idee der Formalisierung in geschichtlichen Abriß, Darmstadt.
Kretschmer, Konrad (1909): Die italienischen Portolane des Mittelmeeres. Ein Beitrag zur Geschichte der Kartographie und Nautik, Berlin.
Kühner, Raphael, Friedrich Blass (1966): Ausführliche Grammatik der griechischen Sprache, Hannover.
Laertius, Diogenes (1990): Leben und Meinungen berühmter Philosophen, Hanburg.
Lalanne, Leon (1846): Mémoire. Sur les tables graphiques et sur la géométrie anamorphique appliquée à diverses questions qui se rattachent à l'art de l'ingénieur, Annales des Ponts et Chaussées (Band 11), Nr. 1, Seite 1-69.
Lamer, Hans (1927): Lemma »Tabula Lusoria«, Wissowa, Georg, Paulys Real-Encyclopädie der Classischen Altertumswissenschaft, Neue Bearbeitung (Band 13) Seite Sp. 1900-2029.
Lane, Frederic C. (1980): Seerepublik Venedig, München.
Lang, Mabel Louis (1956): Numerical Notation on Greek Vases, Hesperia (Band 25), Seite 1-24.
Lang, Mabel Louis (1957): Herodotos and the Abacus, Hesperia (Band 26), Seite 271-287.
Lang, Mabel Louis (1968): Abaci from the Athenian Agora, Hesperia (Band 37), Seite 241-243.
Larfeld, Wilhelm (1898-1907): Handbuch der griechischen Epigraphik, Leipzig.
Lejeune, Michel (1989): Un abécédaire corinthien du Ve siècle en Dardanie, Kadmos (Band 28), Seite 14-18.
Lelgemann, Dieter (2001): Eratosthenes von Kyrene und die Messtechnik der alten Kulturen, Wiesbaden.
Libri, M. (1843): Au sujet du Mémoire présenté dans la dernière séance par M. Chasles, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Band 16), Nr. 3, Seite 215-280.
Lieberman, Stephen J. Of Clay Pebbles, Hollow Clay Balls, and Writing: A Sumerian View, American Journal of Archaeology (Band 84), Nr. 3, Seite 339-358.
Livius, Titus (1993): Römische Geschichte, Darmstadt.
Lohmann, Johannes (1970): Musiké und Logos. Aufsätze zur griechischen Philosophie und Musiktheorie, Stuttgart.
Lopez, Robert S. u. Irving W. Raymond (1990): Medieval Trade in the Mediterranean World. Records of Western Civilization, New York
Luhmann, Niklas (1996): Die Wirtschaft der Gesellschaft, Frankurt/M.
Macho, Thomas (2001/2002): Zeitrechnung und Kalenderreform, Lab. Jahrbuch für Künste und Apparate, Seite 204-227.
Menninger, Karl (1979): Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl, 3., unveränderte. Auflage, Göttingen.
Meynen, Gloria (1998): Büroformate. Von DIN A4 zu Apollo 11, Louis, Herbert Lachmayer und Eleonora, Work & Culture. Büro. Inszenierung von Arbeit (Ausst.kat.) Seite 80–91, Klagenfurt.

Meynen, Gloria (2003): Routen und Routinen, Vogl, Bernhard Siegert u. Joseph, Europa. Kultur der Sekretäre Seite 195–213, Berlin.
Miller, Gary (1994): Ancient Scripts and Phonological Knowledge, Amsterdam.
Mommsen, Theodor (1887): Römisches Staatsrecht (Band 1), 3. Auflage, Berlin.
Mommsen, Theodor (1899): Römisches Strafrecht, Berlin.
Naddaf, Gérard (2003): Anthropogony and Politology in Anaximander of Miletus, u.a., Dirk Couprie, Anaximander in Context, New York.
Nagl, Alfred (1899): Die Rechenmethoden auf dem griechischen Abakus, Zeitschrift für Mathematik und Physik. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik (Band 9), Seite 335-357.
Nagl, Alfred (1914): Die Rechentafel der Alten, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Philosophisch-Historische Klasse (Band 177), Seite 1-84.
Nagl, Alfred (1918): Lemma »Abacus«, Wissowa, Georg, Paulys Realencyclopädie der Classischen Altertumswissenschaft, Neue Bearbeitung (Band III. Supplement) Seite Sp. 4-13, München.
Naumann, Friedrich (2001): Vom Abakus zum Internet. Die Geschichte der Informatik, Darmstadt.
Netz, Reviel (1999): The Shaping of Deduction in Greek Mathematics, Cambridge
Netz, Reviel (2002): Counter-Culture: Towards a History of Greek Numeracy, History of Science (Band 129), Nr. 3, Seite 321–352.
Neugebauer, Otto (1934): Vorlesungen über die der antiken mathematischen Wissenschaften (Band 1), Berlin.
Neugebauer, Otto (1935-1937): Mathematische Keilschrift-Texte, Berlin.
Neugebauer, Otto (1945): Mathematical Cuneiform Texts (Band 29), American Oriental Series
Neugebauer, Otto (1948): The Astronomical Origin of the Theory of Conic Sections, Proceedings of the American Philosophical Society (Band 92), Seite 132-138.
Neugebauer, Otto (1963): The Survival of Babylonian Methods in the Exact Sciences of Antiquity and Middle Ages, Proceedings of the American Philosophical Society (Band 107), Nr. 6, Seite 528-535.
Nilsson, Martin P (1968): Übernahme und Entwicklung des Alphabets durch die Griechen, Pfohl, Gerhard, Das Alphabet. Entstehung und Entwicklung der griechischen Schrift Seite 173–196, Darmstadt.
Nilsson, Martin P. (1918): Übernahme und Entwicklung des Alphabets durch die Griechen (Band 1), Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Historisk-filologiske Meddelelser
Origo, Iris (1997): »Im Namen Gottes und des Geschäfts«. Lebensbild eines toskanischen Kaufmanns der Frührenaissance, Berlin.
Pächt, Otto (1985): Buchmalerei des Mittelalters, München.
Pacioli, Luca (1494): Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita. URL: http://archimedes.mpiwg-berlin.mpg.de/cgi-bin/toc/toc.cgi?dir=pacio_summa_504_it_1494;step=thumb

Pacioli, Luca (1997): Abhandlung über die Buchhaltung, 2., unveränderte. Auflage.

Petronotis, Anargyros (1968): Bauritzlinien und andere Aufschnürungen am Unterbau griechischer Bauwerke in der Archaik und Klassik, München.
Petronotis, Anargyros (1972): Zum Problem der Bauzeichnungen bei den Griechen, Athen.
Pfeiffer, Wolfgang (1989): Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache, Berlin.
Pfohl, Gerhard (1968): Das Alphabet. Entstehung und Entwicklung der griechischen Schrift, Darmstadt.
Platon (1970-1983): Werke in acht Bänden, Darmstadt.
Plinius, Secundus Gaius (1996): Naturkunde: Historia Naturalis, München.
Plutarch (1990): Marcellus, Goold, G. P., Lives (Band 5).
Pollux, Julius (1967): Onomasticon.
Porta, Johannes Baptista (1607): Elementorum Curvilineorum Libri Tres : In quibus altera Geometriae parte restituta, agitur de Circuli Quadratura, Rom.
Posner, Ernst (1972): Archives in the Ancient World, Cambridge/Mass. .
Post, Gaines (1943): Plena Potestas and the Consent in Medieval Assemblies: A Study in Romano-Canonical Procedure and the Rise of Representation, 1150-1325 (Band 1), Traditio
Powell, Barry B. (1996): Homer and the Origin of the Greek Alphabet, 4., unveränderte Auflage, Cambridge.
Powell, Barry B. (2002): Writing and the Origins of Greek Literature, Cambridge.
Precht, Gundolf (1990): Maschinelle Vorfertigung von Säulen und Säulentrommeln, Hoffmann, Adolf, Bautechnik der Antike. Internationales Kolloquium in Berlin vom 15.–17. Februar 1990 Seite 178-183, Mainz.
Price, Derek J. Solla (1964): The Babylonian Pythagorean Triangle Tablet, Centaurus (Band 10), Nr. 1, Seite 219-231.
Pryor, John H. (1988): Geography, Technology, and War. Studies in the Maritime History of the Mediterranean, Cambridge.
Pullan, J. M. (1968): The History of the Abacus, London.
Queller, Donald (1960): 13th Century Diplomatic Envoys: Nuncii and Procuratores, Speculum (Band XXXV), Seite 196-213.
Quintilianus, Marcus Fabius (1995): Institutitonis oratoriae (Band 1), 3. Auflage, Darmstadt.
Recorde, Robert (1557): Whetstone of Whitte, which Is the Seconde Parte of Arithmetike, London.
Rehm, Albert (1913): Lemma »Horologium«, Wissowa, Georg, Paulys Realencyclopädie der Classi¬schen Altertumswissenschaft (Band 16) Seite Sp. 2416–2433, München.
Reuther, Oscar (1957): Der Heratempel von Samos: Der Bau seit der Zeit des Polykrates',, Berlin.
Rheinberger, Hans-Jörg (2005): Mischformen des Wissens, ders., Iterationen Seite 74-100, Berlin.
Riggsby, Andrew M. (1999): Crime and Community in Ciceronian Rome.
Robb, Kevin (1994): Literacy and Paideia in Ancient Greece, New York, Oxford
Robert, Paul (1993): Le Noveau Petit Robert. Dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française, Montréal.

Rotman, Brian (1987): Signifying Nothing. The Semiotics of Zero, London.
Rykwert, Joseph u. Anne Engel (1994): Leon Battista Alberti, Mailand.
Sanudo, Marino (1972): Liber secretorum fidelium crucis. Super terrae sanctae recuperatione et conservatione; Quo et terrae sanctae ac hist. ab orig. et eiusdem vicin. prouinc. geogr. descr. contintur.
Sauer, Albert (1996): Das »Seebuch«. Das älteste erhaltene Seehandbuch und die spätmittelalterliche Navigation in Nordwesteuropa, Hamburg.
Schaber, Wilfried (1982): Die archaischen Tempel der Artemis von Ephesis. Entwurfsprinzipien und Rekonstruktion, Waldsassen
Schäffner, Wolfgang (1997): Operationale Topographien. Repräsentationsräume in den Niederlanden um 1600, Hans-Jörg Rheinberger, Michael Hagner u. Bettina Wahrig-Schmidt, Räume des Wissens. Repräsentation, Codierung, Spur Seite 63-90, Berlin.
Schäffner, Wolfgang (2003): Stevin, der Punkt und die Zahlen, Macho, Thomas, Sigrid Weigel u. Wolfgang Schäffner Der liebe Gott steckt im Detail. Mikrostrukturen des Wissens Seite 201-217, Paderborn.
Schärlig, Alain (2001): Compter avec des cailloux. Le calcul élémentaire sur l'abaque chez les anciens Grecs, Clamecy
Schiller, Karl u. Lübben, August (1875–1880/1931): Mittelniederdeutsches Wörterbuch, Bremen, Münster.
Schmandt-Besserat (1992): Before Writing (Band 1), Austin.
Schmidt, Max C. P. (1916): Terminologische Studien, 2. verbesserte Auflage, Leipzig
Schwabe, Wilhelm (1980): »Mischung« und »Element« im Griechischen bis Platon. Wort- und begriffsgeschichtliche Untersuchungen, insbesondere zur Bedeutungsentwicklung von stoicheia, □onn.
Schwyzer, Eduard (1990): Griechische Grammatik auf der Grundlage von Karl Brugmanns Griechischer Grammatik (Band 1), München.
Serranus, Johannes (1539): Dictionarium latinogermanicum, quo singulae latinae, germanicae simpliciter interpretantur, pro literarum tyronibus ex aliquot nostri temporis autoribus comportatum, & in ordem alphabeticum congestum, Nürnberg.
Serres, Michel (1997): Gnomon: Die Anfänge der Geometrie in Griechenland, ders., Elemente einer Geschichte der Wissenschaften Seite 109-177, Frankfurt a. M.
Shannon, Claude (2000): Vorhersage und Entropie der gedruckten Englischen Sprache, Ders., Ein|Aus. Ausgewählte Schriften zur Kommunikations- und Nachrichtentheorie Seite 237-256, Berlin.
Siegert, Bernhard Vögel, Engel und Gesandte. Alteuropas Über¬tragungsmedien, Wenzel, Horst, Gespräche–Boten–Briefe. Körpergedächtnis und Schriftgedächtnis im Mittelalter Seite 45–62.
Siegert, Bernhard (2003): Passage des Digitalen. Zeichenpraktiken der neuzeitlichen Wissenschaften 1500–1900, Berlin.
Simon, Max (2003): Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte, Berlin.
Soreau, Rodolphe (1918): Sur l'origine et le sens du mot abaque«, zusammengefasst von Ch. Lallemand, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Band 166), Seite 67-69.

Starobinski, Jean (1980): Wörter unter Wörtern. Die Anagramme des Ferdinand de Saussure, München.
Sutherland, Ivan (1962): A Man-Machine Graphical Communication System, MIT, Cambridge.
Szabo, Árpád (1958): 'δείκνυμι' als mathematischer Terminus für 'beweisen', MAIA. Rivista di Letteratura classiche. Nuova Serie (Band X), Nr. II, Seite 106-131.
Szabo, Árpád (1994): Die Entfaltung der griechischen Mathematik, Mannheim.
Szabo, Árpád & Erkka Maula (1982): Enklima. Untersuchungen zur Frühgeschichte der griechischen Astronomie. Geographie und der Sehnentafeln, Athen.
Taisbak, C. M. (1965): Roman Numerals and Abacus, Classica et Mediaevalia (Band XXVI), Seite 147-160.
Taylor, Eva Germaine (1971): The Haven-Finding Art. A History of Navigation from Odysseus to Captain Cook, Toronto.
Thomas, Ivor (1967): Selections Illustrating the History of Greek Mathematics, Cambridge.
Tobler, Friedrich (1938): Deutsche Faserpflanzen und Pflanzenfasern, München, Berlin
Tod, Marcus Niebuhr (1913): The Acrophonic Numeral Systems, The Journal of Hellenic Studies (Band 33), Seite 27-34.
Tod, Marcus Niebuhr (1926): Further Notes on the Greek Acrophonic Numerals, Annual of the British School of Athens (Band XXVIII), Seite 141–157.
Tod, Marcus Niebuhr (1936/7, publ. 1940): The Greek Acrophonic Numerals, Annual of the British School of Athens (Band XXXVII), Seite 236–257.
Tod, Marcus Niebuhr (1954): The Alphabetical Numeral System in Attica, Annual of the British School of Athens (Band XLIX), Seite 1-7.
Tod, Marcus Niebuhr (1954): Letter Labels in Greek Inscriptions, Annual of the British School of Athens (Band XLV), Seite 126–139.
Turing, Alan Mathison (1992): Lecture to the London Mathematical Society on 20 February 1947, Ince, D. C., Collected Works of A. M. Turing (Band 3) Seite 87-104.
Turing, Alan Mathison (1992): Proposals for Development in the Mathematical Division of an Automatic Computing Engine (ACE). Report to the Executive Committee of the National Physics Laboratory, Ince, D. C., Collected Works of A. M. Turing (Band 3) Seite 1-86, Amsterdam.
Turing, Alan Mathison (2004): Computing Machinery and Intelligence, Copeland, B. Jack, The Essential Turing. The Ideas that Gave Borth to the Computer Age Seite 410-433., Oxford.
Unger, Richard W. (1980): The Ship in the Medieval Economy 600–1600, Montreal.
Villehardouin, Geoffroy de (1998): Die Eroberung Konstantinopels, Sollbach, Gerhard E., Die Chroniken des Vierten Kreuzzugs, Pfaffenweiler
Vismann, Cornelia (2000): Akten. Medientechnik und Recht, München
Vitruvius, Marcus (1991): Virtuvii De Architectura Libri Decem, Darmstadt.
Wachter, Rudolf (1989): Zur Vorgeschichte des griechischen Alphabets, Kadmos (Band 28), Seite 19-84.
Waerden, Bartel Leenert van der (1966): Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, Babylonische und griechische Mathematik, 2., ergänzte Auflage, Stuttgart.

Waerden, Bartel Leenert van der (1983): Geometry and Algebra in Ancient Civilizations, Berlin.
Wagner, Hermann (1918): Die Entwicklung der wissenschaftlichen Nautik im Beginn des Zeitalters der Entdeckungen nach neueren Anschauungen, Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie: Zeitschrift für Seefahrt und Meereskunde (Band 46), Nr. III/IV u. IX/X.
Wandhoff, Heiko (2001): Ekphrasis. Bildbeschreibungen in der Literatur von der Antike bis in die Gegenwart, Wenzel, Horst, Audiovisualität vor und nach Gutenberg. Ur Kulturgeschichte der medialen Umbrüche Seite 175-184, Wien, Mailand.
Waschkies, Hans Joachim (1989): Anfänge der Arithmetik im Alten Orient und bei den Griechen, Amsterdam.
Waters, David W. (1958): The Art of Navigation in England in Elizabethan and Early Stuart Time, London.
Wells, Herbert George (2004): Die Zeitmaschine, München.
Wenzel, Horst (1997): Boten und Briefe. Zum Verhältnis körperlicher und nichtkörperlicher Nachrichtenträger, ders., Gespräche: Boten: Briefe. Körperverhältnis und Schriftgedächtnis im Mittelalter Seite 86–105, Berlin.
White, Lynn jr. (1962): Medieval Technology and Social Change, Oxford.
Wilcken, Ulrich (1893): ΄Υπόμνηματισμοι, Philologus (Band 54), Seite 80-126.
Wölfflin, Eduard (1884): Thesauri Latini specimen, 1. Teil, Archiv für Lexikographie und Grammatik mit Einschluss des Älteren Mittellateins als Vorarbeit zu einem Thesaurus Linguae Latinae (Band 1), Seite 427–439.
Woodward, Roger D. (1997): Greek Writing from Knossos to Homer. A Linguistic Interpretation of the Origin of the Greek Alphabet and the Continuity of Ancient Greek Literacy, New York, Oxford
Xenophon (1990): Anabasis. Der Zug der Zehntausend, München, Zürich.
Xenophon (1992): ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ (Gespräch über die Haushaltsführung), Audring, Gert, Ökonomische Schriften, griechisch und deutsch, Berlin
Zemanek, Heinz (1981): DIXIT ALGORIZMI. His Background, his Personality, his Work, and his Influence, Knuth, P. Erhov & Donald, Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science. Proceed¬ings, Ur-gench, Uzbek SSR. September 16–22, 1979 Seite 1-81, Berlin, Heidelberg, New York

INHALTSVERZEICHNIS

Zurück in die Zukunft

Ein Vorwort 3

A

DIE ERFINDUNG DER EBENEN FLÄCHE 17

Der Abakus als Universalmedium 17

Die Macht eines Sandkorns 28

Das Gesetz der großen Zahl 29

Die Bündelung und das »Mohnkorn« 31

Der kleinste Abakus und das Gesetz der Reihe 33

Die Schrift der Tafeln 36

Beschriebene Tafeln 36

Eine unbeschriebene Tafel und eine Kritzelei 38

Die Spur der Steine 40

Schrift oder Zahl 40

10 × 10: fast ein Holzweg 45

Abstraktion und Zählbarkeit 47

Über den Schattenstab und einen unsicheren Zeugen 48

Über Säulen und Schattenfänger und über eine Arithmetik der Steine 49

Die Arithmetik der Säulenreihen 50

Auf Fundamenten zeichnen 54

Mit Säulentrommeln rechnen 57

Von der Säulentrommel zu einer rudimentären Geometrie des Kreises 61

Über eine gerade Linie 65

Über den Feind der Planimetrie: Die derangierte Linie 65

Der Gnomon als Lot und Winkelmaß 66

Über einen rechten Winkel und eine Diagonale 69

Die »Gegenseite« 77

Die Geometrie der »Gegenseite« 80

Die Arithmetik der Fläche 81

Über zwei krumme Linien: Die Quadratur der Monde 85

B

BÜRO ALS ÜBERTRAG 93

Die Ordnung der Zahlen 95

Über die Zerlegung 96

Über die Reihung 101

Über eine numerische Kurzschrift 102

Über einen Außenseiter 105

Über die Buchstabenzahlen und eine neue Unterscheidung 106

Ein letzter Auftritt der akrophonischen Zahlen 109

Über die Operationen der Rechenfläche 130

Über einen namenlosen Zahlmeister und die Namen des Rechenbretts 130

Über die Mechanik des Buchhalters und ein Nichtquadrat 139

Der Übertrag tritt auf 143

Der Handabakus und die Linearität der Führungsrillen 145

X – Bündeln, Abschlagen, Dezimieren 147

X – Tilgung als Code 148

Die Verwaltung des Übertrags 150

Routen 151

Über Staub, Wind und andere Dinge, die die Rechnung in Unordnung bringen: Eine flüchtige Vorschau 151

Über einen Holzweg, der auf direktem Wege zum Meer führt 154

Ein Ort mit Untiefe 156

Der vierte Kreuzzug: eine Passage mit fehlerhaftem Übertrag 157

Über einen blinden Garanten des erfolgten Übertrags, den 14 Schwüre zu Fall bringen 160

Noch einmal über die Wiederholung 163

Weg und Zahl 166

Über die Zahlenbewegung 168

Die doppelte Anschreibung von Posten 184

Ein doppelter Federstrich 186

Danksagung 191

LITERATURVERZEICHNIS 193